दक्ष®

16 सितम्बर 2018 एवं 09 सितम्बर 2018
का प्रश्न-पत्र सम्पूर्ण हल एवं व्याख्या सहित

राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड (RSSB)

2024

Complete Notes on

No. 1

LDC

PAPER-I • PART-C

गणित

- लगभग 1100 से ज्यादा वस्तुनिष्ठ प्रश्नों का समावेश
- राजस्थान में हुई LDC की विगत प्रतियोगी परीक्षाओं के (सात प्रश्न-पत्रों का) व्याख्या सहित अध्यायवार समावेश

पवन शर्मा

Daksh Books

राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड, जयपुर

द्वारा आयोजित

लिपिक ग्रेड-II/कनिष्ठ सहायक संयुक्त सीधी भर्ती

लिखित परीक्षा हेतु परीक्षा स्कीम

फेज–I			
क्र.सं.	प्रश्न–पत्र	अंक	अवधि
1.	सामान्य ज्ञान, दैनिक विज्ञान और गणित	100	3 घण्टे
2.	सामान्य हिन्दी और अंग्रेजी	100	3 घण्टे
फेज–II			
I. नि:शक्त व्यक्तियों से भिन्न अभ्यर्थियों के लिए			
1.	कम्प्यूटर पर हिन्दी में टंकण		
	(क) गति परीक्षण	25	10 मिनट
	(ख) दक्षता परीक्षण	25	10 मिनट
2.	कम्प्यूटर पर अंग्रेजी में टंकण		
	(क) गति परीक्षण	25	10 मिनट
	(ख) दक्षता परीक्षण	25	10 मिनट
II. नि:शक्त व्यक्तियों को उनके द्वारा फेज में प्राप्त औसत अंक दिये जायेंगे।			

पाठ्यक्रम (Syllabus)

PAPER-I # सामान्य ज्ञान

सामान्य ज्ञान (GENERAL KNOWLEDGE)

1. **सामयिक मामले (सम्बन्ध)**—राष्ट्रीय एवं प्रादेशिक स्तर की प्रमुख घटनाएँ एवं मुद्दे तथा सम्बन्धित संगठन एवं संस्थाएँ।
2. **भूगोल एवं प्राकृतिक संसाधन**—(अ) भारत की पारिस्थितिकी एवं वन्य प्राणी (ब) राजस्थान की भौतिक दशाएँ – जलवायु, वनस्पति एवं मृदा, प्रमुख भौतिक विभाग, मानव संसाधन-जनसंख्या एवं जनजातियाँ, राजस्थान के प्राकृतिक संसाधन-खनिज, वन, जल, पशु, वन्य प्राणी एवं संरक्षण।
3. **राजस्थान में कृषि एवं आर्थिक विकास**—राजस्थान की प्रमुख फसलें, कृषि आधारित उद्योग, प्रमुख सिंचाई परियोजनाएँ, मरुभूमि के विकास सम्बन्धी परियोजनाएँ, हस्त उद्योग। विभिन्न आर्थिक योजनाएँ, कार्यक्रम एवं विकास की संस्थाएँ। इनमें पंचायती राज एवं उनकी भूमिका।
4. **राजस्थान का इतिहास एवं संस्कृति—**
   (अ) मध्यकालीन इतिहास
   (ब) स्वतंत्रता आंदोलन एवं राजनैतिक चेतना
   (स) राजनैतिक पुनःर्गठन
   (द) लोक भाषाएँ (बोलियाँ) एवं साहित्य
   (य) लोक संगीत एवं लोक नृत्य
   (र) सन्त, कवि, योद्धा, लोक देवता एवं लोक देवियाँ एवं साम्प्रदायिक सौहार्द
   (ल) मेले एवं त्योहार, रीति-रिवाज, वेशभूषा तथा आभूषण।
5. **राजस्थान की औद्योगिक विकास–**
   (अ) प्रमुख उद्योग एवं औद्योगिक क्षेत्र
   (ब) कच्चे माल की उपलब्धता
   (स) खनिज आधारित बड़े, छोटे एवं कुटीर उद्योग
   (द) ऊर्जा के विभिन्न स्रोत – जल विद्युत, तापीय, अणु, पवन एवं सौर ऊर्जा।

दैनिक विज्ञान (Everyday Science)

1. **भौतिक एवं रासायनिक परिवर्तन (Physical and Chemical Changes)**—ऑक्सीकरण एवं अपचयन अभिक्रियाएँ (Oxidation and reduction reaction); उत्प्रेरक (Catalysts)।
2. **धातु, अधातु एवं इनके प्रमुख यौगिक (Metals, non-metals and their important compounds)**—सामान्य जीवन में प्रयुक्त कुछ महत्त्वपूर्ण यौगिक (Some important compounds used in daily life)।
3. **कार्बन तथा कार्बन के महत्त्वपूर्ण यौगिक (Carbon and important compounds of carbon)**—हाइड्रोकार्बन (Hydrocarbons ; कार्बन के अपर रूप (Allotropes of carbon); क्लोरो-फ्लुओरो कार्बन या फ्रियॉन (Chloro-Fluoro Carbon or Freons); सी.एन.जी. (Compressed Natural Gas); बहुलक (Polymers); साबुन एवं अपमार्जक (Soap and detergents)।
4. **प्रकाश का परावर्तन व इसके नियम (Reflection of light and its laws)**—प्रकाश का वर्ण विक्षेपण (Dispersion of light); लैंस के प्रकार (Types of lenses); दृष्टि दोष तथा उसका निवारण (Defects of vision and their corrections)।
5. **विद्युत (Electricity)**—विद्युत धारा (Electric current); ओम का नियम (Ohm's law); विद्युत सेल (Electric cell); फैराडे के विद्युत चुम्बकीय-प्रेरण के नियम (Faraday's laws of electro magnetic induction); विद्युत जनित्र (Electric generator); विद्युत मोटर (Electric Motor); घरों में विद्युत संयोजन व्यवस्था (Electric connection arrangements in houses); घरों में काम आने वाली विद्युत युक्तियों की कार्यविधि रख-रखाव एवं उपयोग में लेते समय सावधानियाँ (Working, maintenance and precautions during use of house hold electrical appliances)।
6. **अंतरिक्ष एवं सूचना प्रौद्योगिकी (Space and information technology)**—भारत का अंतरिक्ष अनुसंधान कार्यक्रम (Space research programme of India); सूचना प्रौद्योगिकी (Information technology)।
7. **आनुवंशिकी से सम्बन्धित सामान्य शब्दावली (General terminology related to genetics)**—मेण्डेल के आनुवांशिकता के नियम (Mendel's law of inheritance); गुणसूत्रों की संरचना Structure of Chromosomes); न्यूक्लिक अम्ल (Nucleic Acids); प्रोटीन संश्लेषण का केन्द्रीय सिद्धान्त (Central dogma of protein synthesis); मनुष्य में लिंग निर्धारण (Sex determination in human)।
8. **पर्यावरण अध्ययन (Environmental Study)**—पारिस्थितिक तंत्र की संरचना (Structure of ecosystems); पारिस्थितिक तन्त्र के जैविक घटक (Biotic factors of ecosystem); पारिस्थितिक तंत्र में ऊर्जा प्रवाह (energy flow in ecosystem); जैव भू रसायनिक चक्र (Biogeochemical cycles); जैव प्रौद्योगिकी : सामान्य जानकारी (Biotechnology–General information); जैव-पेटेन्ट (Bio-patent); नई पादप किस्मों का परिवर्धन (Development of new plant varieties); ट्रांसजेनिक जीन या पराजीनी जीव (Transgenic organisms)।
9. **जन्तुओं का आर्थिक महत्त्व (Economic importance of animals)**—पादपों का आर्थिक महत्त्व (Economic importance of plants)।
10. **रक्त समूह (Blood groups)**—रक्ताधान (Blood transfusion); आर.एच. कारक (Rh. Factor)। रोगाणु तथा मानव स्वास्थ्य (Pathogens and human health); कुपोषण तथा मानव स्वास्थ्य (Malnutrition and human health)। मानव रोग कारण एवं निवारण (Human disease : Causesand cures)।

गणित (Mathematics)

1. वैदिक विधि से पूर्ण संख्याओं का वर्ग, घनफल, वर्गमूल, घनमूल (6 अंकों की संख्याओं तक)।
2. गुणनखण्ड, बहुपद के गुणनखण्ड, समीकरण, दो चरों वाले रैखिक समीकरण, द्विघात समीकरण, लघुगणक।
3. अनुपात-समानुपात, प्रतिशतता, लाभ-हानि, साझा, सरल ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज, बट्टा।
4. एक बिन्दु पर बनने वाले कोण एवं रेखाएँ, सरल रैखीय आकृतियाँ, त्रिभुजों की सर्वांगसमता, समरूप त्रिभुज, कार्तीय निर्देशांक पद्धति, दो बिन्दुओं के मध्य दूरियाँ, दो बिन्दुओं के मध्य दूरियों का आंतरिक एवं बाह्य विभाजन।
5. समतल आकृतियों का क्षेत्रफल, वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल, घन, घनाभ, गोले, शंकु तथा बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन।
6. कोण एवं उनके माप, न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ, ऊँचाई-दूरी की सामान्य समस्याएँ।
7. आँकड़ों का चित्रों द्वारा निरूपण, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, माध्य विचलन, जन्म, मृत्यु सांख्यिकी एवं सूचकांक।

*****

Pattern of Question Papers : 1. Objective Type Question Paper. 2. Maximum Marks : 100 3. Number of Questions : 150 4. Duration of Paper : Three Hours. 5. All Questions carry equal marks. 6. There will be **Negative Marking**.

अनुक्रमणिका

अध्याय नं. *अध्याय का नाम* .... *पृष्ठ संख्या*

2018

राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड [RSSB] द्वारा आयोजित

लिपिक ग्रेड-II/कनिष्ठ सहायक संयुक्त (LDC)

Paper-I • गणित • परीक्षा दिनांक 16-09-2018

101. 9 मीटर ऊँचे शंकु के आकार के टेंट के आधार की परिधि 44 मीटर है। इसके अन्दर की वायु का आयतन क्या है? ($\pi = 22/7$)

(A) 642 मी^{3} (B) 447 मी^{3} (C) 446 मी^{3} (D) 462 मी^{3} **[D]**

व्याख्या— शंकु की परिधी = 44 मीटर

$$2\pi r = 44$$

$$r = \frac{44}{2\pi} = \frac{22}{22}\times 7 = 7 \text{ मीटर}$$

शंकु की ऊँचाई = 9 मीटर

$$\text{वायु का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 9$$

= 21 × 22 = 462 घन मीटर

102. यदि एक गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान इसके आयतन के संख्यात्मक मान के समान हो तो गोले की त्रिज्या है—

(A) 1 इकाई (B) 3 इकाई (C) 5 इकाई (D) 10 इकाई **[B]**

व्याख्या—गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = गोले का आयतन

$$4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

r = 3 इकाई

103. एक घनाभाकार काँच का डिब्बा 25 सेमी लम्बा, 20 सेमी चौड़ा तथा 10 सेमी ऊँचा है। काँच के डिब्बे का क्षेत्रफल है—

(A) 15,000 सेमी^{2} (B) 1,000 सेमी^{2}

(C) 1,900 सेमी^{2} (D) 1,800 सेमी^{2} **[C]**

व्याख्या—काँच के डिब्बे की लम्बाई = 25 सेमी.

चौड़ाई = 20 सेमी.; ऊँचाई = 10 सेमी.;

काँच के डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2(ल. × चौ. + चौ. + ऊं. × ल.)

= 2(25 × 20 + 20 × 10 + 10 × 25)

= 2(500 + 200 + 250) = 1900 सेमी^{2}

104. यदि एक घन के विकर्ण की लम्बाई $4\sqrt{3}$ सेमी है, तो इसका आयतन है—

(A) 32 सेमी^{3} (B) 64 सेमी^{3}

(C) 192 सेमी^{3} (D) $192\sqrt{3}$ सेमी^{3} **[B]**

व्याख्या— घन का विकर्ण = $4\sqrt{3}$

भुजा $\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ सेमी

अतः भुजा = 4 सेमी

घन का आयतन = (भुजा)^3 = (4)^3 = 64 सेमी^{3}

105. एक घड़ी के घण्टे की सूई 6 सेमी लम्बी है। 90 मिनट में इस सूई द्वारा बनाये गये त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल क्या है?

(A) 7.7 सेमी^{2} (B) 7.14 सेमी^{2}

(C) 14.7 सेमी^{2} (D) 14.14 सेमी^{2} **[D]**

व्याख्या—सूर्य की लम्बाई (r) = 6 सेमी.

घड़ी के घण्टे की सूई 1 मिनट में कोण बनाती है = $\frac{1}{2}^\circ$

घड़ी के घण्टे की सूई 90 मिनट में कोण बनाती है = $\frac{90}{2} = 45^\circ$

अतः $\theta = 45^\circ$

$$\text{त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2\theta}{360}$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{6\times 6\times 45}{360}$$

$$= \frac{22\times 36}{7\times 8} = 14.14 \text{ वर्ग सेमी.}$$

106. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 2% की दर से वृद्धि करती है। यदि वर्तमान जनसंख्या 50,000 हो तो, दो वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या कितनी होगी?

(A) 52,020 (B) 52,000 (C) 51,980 (D) 52,100 **[A]**

व्याख्या—वर्तमान जनसंख्या = 50000

वृद्धि दर = 2%

$$\text{2 वर्ष बाद जनसंख्या} = 50000\times\left(1+\frac{2}{100}\right)^2$$

$$= 50000\times\frac{102}{100}\times\frac{102}{100}$$

= 102 × 102 × 5 = 52020

107. संख्याओं के किस समुच्चय का माध्य, माध्यिका एवं बहुलक का मान समान है?

(A) 2, 2, 2, 2, 4 (B) 1, 3, 3, 3, 5

(C) 1, 1, 2, 5, 6 (D) 1, 1, 1, 2, 5 **[B]**

व्याख्या—दिये गये विकल्पो में विकल्प B पर विचार करने पर

1, 3, 3, 3, 5

$$\text{माध्य} = \frac{1+3+3+3+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

बहुलक = 3

राजस्थान कर्मचारी चयन बोर्ड [RSSB]

द्वारा आयोजित

2018 लिपिक ग्रेड-II/कनिष्ठ सहायक संयुक्त (LDC)

Paper-I • गणित • परीक्षा दिनांक 09-09-2018

1. दिये गये आँकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन है—
34, 66, 30, 38, 44, 50, 40, 60, 42, 51

(A) 8.7 (B) 8.8 (C) 8.9 (D) 9.0 **[A]**

व्याख्या—दिये गये आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

30, 34, 38, 40, 42, 44, 50, 51, 60, 66

पदो की संख्या (n) = 10

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{10}{2}\right)^{\text{वाँ पद}} + \left(\frac{10}{2}+1\right)^{\text{वाँ पद}}}{2}$$

$$= \frac{(5\text{वां पद} + 6\text{वां पद})}{2}$$

$$= \frac{42+44}{2} = 43$$

अत: माध्यिका से माध्य विचलन

$$= \frac{|(43-30)|+|(43-34)|+|(43-38)| + |(43-40)|+|(43-42)|+|(43-44)| + |(43-50)|+(43-51)|+|(43-60)| + |(43-66)|}{10}$$

$$= \frac{13+9+5+3+1+1+7+8+17+23}{10}$$

$$= \frac{87}{10} = 8.7$$

2. किसी आवृत्ति आबंटन में माध्य तथा माध्यिका क्रमशः 52 तथा 55 हैं, तो आबंटन का बहुलक क्या है?

(A) 61 (B) 53.5 (C) 53 (D) 54 **[A]**

व्याख्या— बहुलक = (3 × माध्यिका) – (2 × माध्य)

बहुलक = (3 × 55) – (2 × 52)

बहुलक = 165 – 104

बहुलक = 61

3. दो समान घन जिसके प्रत्येक का आयतन 64 सेमी^{3} है के छोरों को जोड़कर एक घनाभ बनाया जाता है, तो घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है—

(A) 80 सेमी.^{2} (B) 160 सेमी.^{2}
(C) 320 सेमी.^{2} (D) 640 सेमी.^{2} **[B]**

व्याख्या—घन का आयतन = 64 घन सेमी

(भुजा)^3 = 64 घन सेमी

भुजा = $\sqrt[3]{64}$ = 4 सेमी

दो घनों को जोड़ने पर प्राप्त घनाभ की

लम्बाई = (4 + 4 = 8 सेमी.)

चौड़ाई = 4 सेमी.

ऊँचाई = 4 सेमी.

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2(ल. × चौ. + चौ. × ऊ . + ऊ. × ल.)

= (8×4 + 4×4 + 4×8)

= 2(32 + 16 + 32)

= 160 वर्ग सेमी

4. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 वर्ग मीटर है। घन की भुजा की लम्बाई क्या है?

(A) 6 मी. (B) 169 मी. (C) 13 मी. (D) 11 मी. **[C]**

व्याख्या—घन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = 1014 वर्गमीटर

6(भुजा)^2 = 1014 वर्गमीटर

$$(\text{भुजा})^2 = \frac{1014}{6} = 169 \text{ वर्गमीटर}$$

भुजा = $\sqrt{169}$ = 13 वर्गमीटर

5. एक वृत्त का व्यास उसकी परिधि से 105 सेमी कम है, तो वृत्त की त्रिज्या है—

(A) 22 सेमी (B) 23 सेमी (C) 24 सेमी (D) 24.5 सेमी **[D]**

व्याख्या— वृत्त की (परिधि – व्यास) = 105 सेमी

$2\pi r - 2r = 105$

$2r(\pi-1) = 105$

$$r = \frac{105}{2(\pi-1)}$$

$$r = \frac{105}{2(3.14-1)}$$

$$r = \frac{105}{4.28} = 24.5 \text{ सेमी.}$$

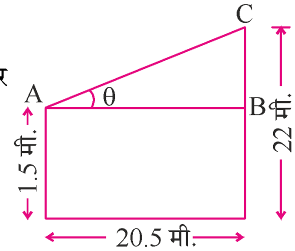
अतः वृत्त की त्रिज्या 24.5 सेमी. है।

6. 1.5 मी लम्बा प्रेक्षक 22 मी ऊँचे टॉवर से 20.5 मी दूर है। प्रेक्षक की आँखों से टॉवर के शीर्ष का उन्नयन कोण है—

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75° **[B]**

व्याख्या—माना प्रेक्षक की आँखों से कोण θ है

ΔABC से



BC = 22 – 1.5

= 20.5 मीटर

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{20.5}{20.5}$$

$\tan\theta = 1$

$\tan\theta = \tan 45°$

= 45°

अत: आँखों से टॉवर के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° होगा।

1 वैदिक गणित [Vedic Mathematics]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ वैदिक गणित अंकगणितीय गणना की वैकल्पिक एवं संक्षिप्त विधियों का समूह है। इसके आद्य संशोधक एवं प्रणेता पुरी के शंकराचार्य **स्वामी भारती कृष्णतीर्थ** माने जाते हैं।

❖ वैदिक गणित, गणितीय **सोलह सूत्रों** एवं **तेरह उपसूत्रों** पर आधारित है जो अग्र प्रकार हैं—

	सूत्र	उपसूत्र
1.	**एकाधिकेन पूर्वेण** (पहले से एक अधिक)	**आनुरुप्येण** (समानुपात में)
2.	**निखिलम् नवतश्चरमं दशतः** (सभी नौ से एवं अंतिम दस से)	**शिष्यते शेषसंज्ञः** (अचर शेषफल)
3.	**ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्** (ऊपर से नीचे एवं तिरछा)	**आद्यमाद्येनान्त्यमन्तयेन** (प्रथम प्रथम द्वारा एवं अंतिम अंतिम द्वारा)
4.	**परावर्त्य योजयेत्** (परिवर्तन एवं प्रयोग)	**केवलैः सप्तकं गुण्यात्** (7 का गुण्य 143 है)
5.	**शून्यं साम्य समुच्चये** (यदि समुच्चये समान हो तो समुच्चये का मान शून्य होगा)	**वेष्टनम्** (वक्र स्पर्श–बिन्दु द्वारा)
6.	**आनुरुप्ये शून्यमन्यत्** (यदि एक आनुपातिक है तो दूसरा शून्य होगा)	**यावदूनं तावदूनम्** (कमी से कम करना)
7.	**संकलन व्यवकलनाभ्याम्** (योग एवं अन्तर द्वारा)	**यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्** (कमी से और कम करना एवं उसका वर्ग निश्चित करना)
8.	**पूरणापूरणाभ्याम्** (पूर्णता एवं अपूर्णता द्वारा)	**अन्त्ययोर्दशकेऽपि** (अंतिम अंकों का योग 10 है तथा पहले खण्ड समान हैं)
9.	**चलनकलनाभ्याम्** (अवकलन गणित द्वारा)	**अन्त्ययोरेव** (केवल अन्तिम पद)
10.	**यावदूनम्** (कमी द्वारा)	**समुच्चय गुणितः** (गुणनफल में गुणांकों का योग)
11.	**व्यष्टिसमष्टिः** (विशिष्ट एवं साधारण)	**लोपनस्थापनाभ्याम्** (बारी–बारी से हटाने एवं रखने की प्रक्रिया द्वारा)
12.	**शेषाण्यङ्केन चरमेण** (अंतिम अंक द्वारा शेषफल)	**विलोकनम्** (अवलोकन द्वारा)
13.	**सोपान्त्य द्वयमन्त्यम्** (अंतिम एवं उपान्त्य का दोगुना)	**गुणित समुच्चयः समुच्चयगुणितः** (गुणनखण्डों के गुणांक के योगों का गुणनफल उनके गुणनफलों के योग के बराबर होता है।)
14.	**एकन्यूनेन पूर्वेण** (पहले से एक कम)	
15.	**गुणित समुच्चयः** (गुणनखण्डों के गुणांक के योगों का गुणनफल)	
16.	**गुणक समुच्चयः** (समस्त गुणक)	

2 गुणनखण्ड, बहुपद के गुणनखण्ड [Factors, Factor of Polynomials]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

गुणनखण्ड (Factor)

- किसी संख्या का गुणनखण्ड वे संख्याएँ होती है जो उस संख्या को पूर्णतः विभाजित कर देती है अर्थात् जिनका उस संख्या में पूरा-पूरा भाग चला जाता है।
  जैसे—
  16 के गुणनखण्ड $\rightarrow$ 1, 2, 4, 8, 16
  36 के गुणनखण्ड $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
  45 के गुणनखण्ड $\rightarrow$ 1, 3, 5, 9, 15, 45
  48 के गुणनखण्ड $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
  60 के गुणनखण्ड $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
- **गुणनखण्ड (Factor) तथा गुणज (Multiple)**—यदि कोई संख्या a दूसरी संख्या b को पूर्णतया विभाजित करती है तो संख्या a को संख्या b का गुणनखण्ड तथा संख्या b को संख्या a का गुणज कहते हैं।
- जब एक बहुपद को दो या दो से अधिक बहुपदों के गुणनफल के रूप में विस्तारित किया जाता है, तब इनमें से प्रत्येक बहुपद को एक गुणनखण्ड कहा जाता है। इन गुणनखण्डों को प्राप्त करने की विधि को **गुणनखण्डन** कहते हैं।
- **गुणनखण्ड प्रमेय**—यदि $p(x)$ घात $n \geq 1$ वाला एक बहुपद हो और a कोई वास्तविक संख्या हो, तो
  (i) $(x - a)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है, यदि $p(a) = 0$ हो, और
  (ii) $p(a) = 0$ होता है, यदि $(x - a)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो।

बीजीय सर्वसमिकाएँ (Algebraic Identities)

- बीजीय सर्वसमिका एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

महत्वपूर्ण सूत्र—

- $xa + xb + xc = x(a + b + c)$
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$
- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ या
  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- यदि $a + b + c = 0$ तो $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$
- $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$
- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4$
- $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$
- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$
- $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$

- **शेषफल प्रमेय**—यदि x के धनात्मक पूर्णांक घातों वाले किसी व्यंजक में जब $(x - a)$ से भाग दिया जाता है तो व्यंजक में $x = a$ रखने पर जो शेषफल प्राप्त हो जाता है। इसी को ही शेषफल प्रमेय कहते हैं।
  (i) यदि $(x - a)$ बहुपद $P(x)$ का एक गुणनखण्ड है तो शेषफल $P(A) = 0$
  (ii) यदि $P(A) = 0$ है तो $(x - a)$ बहुपद $P(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।
  (iii) यदि $x = a$ रखने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है तो $(x - a)$ बहुपद का एक गुणनखण्ड होगा।
  (iv) यदि $x = -a$ रखने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है तो $(x + a)$ बहुपद का एक गुणनखण्ड होगा।

बहुपद (Polynomials)

- $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ के रूप में एक बीजीय व्यंजक, जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ वास्तविक संख्यायें हैं और सभी x के घातांक ऋणेत्तर पूर्णांक हैं। x में एक बहुपद कहलाता है तथा x का अधिकतम घातांक बहुपद की घात कहलाती है, यदि $a_n = 0$ (शून्य) है।
  $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots a_nx^n$ बहुपद के पद हैं तथा $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ बहुपद के विभिन्न गुणांक हैं।

3 समीकरण, दो चरों वाले रैखिक समीकरण [Equations, Linear Equations of Two Variables]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **समीकरण (Equation)**—किसी दी गई समीकरण से अभिप्राय दो या दो से अधिक बीजगणितीय व्यंजकों की समानता का एक ऐसा कथन होता है, जिसके अन्तर्गत एक या एक से अधिक अज्ञात राशियाँ दी गई होती हैं।

जैसे—$ax + b = c$ एक समीकरण है इसमें अज्ञात राशि x है जो कि केवल एक मान $x = \frac{c-b}{a}$ के लिये ही सत्य है।

❖ **चर एवं अचर राशि**—किसी दी गई समीकरण में प्रयुक्त वर्णाक्षर संकेतों (x, y आदि) को चर राशि कहा जाता है। इन राशियों का मान हमेशा अनिश्चित रहता है। जबकि दी गई समीकरण में प्रयुक्त अंकीय राशियाँ (1, 2, 3 …) अचर राशियाँ कहलाती हैं। इन राशियों का मान निश्चित रहता है।

जैसे—$2x + 5y = 7$ में x तथा y चर राशियाँ हैं, जबकि 2, 5 एवं 7 अचर राशियाँ हैं।

1. जिस समीकरण में अज्ञात (चर) राशि प्रथम घात में हो, उसे सरल समीकरण कहते हैं। जैसे—

$3x = 6$,
$2x = x + 6$ तथा
$3x + 8 = 2x + 8$

2. सरल समीकरण को हल करना :

(i) चर राशियाँ एक पक्ष (बायाँ पक्ष) में तथा अचर राशियाँ दूसरे पक्ष (दायाँ पक्ष) में रखते हैं।

(ii) किसी राशि का पक्षान्तर करते समय चिह्न बदल देते हैं।

(iii) कोष्ठक आदि हों तो नियमानुसार खोल देते हैं।

(iv) यदि समीकरण के पद भिन्न में हों तो दोनों पक्षों के पदों के LCM से प्रत्येक पद को गुणा कर देते हैं।

(v) यदि दोनों पक्षों में एक-एक पद भिन्न रूप में हों तो 'वज्रगुणन' द्वारा हल कर लेते हैं।

(vi) समीकरण के किसी पक्ष में एक से अधिक पद हों तो उस पक्ष के हरों का LCM लेकर उसे एक पद में बदलकर, वज्रगुणन किया जा सकता है।

(vii) दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलकर लघुत्तम लेकर समीकरण हल कर लेते हैं।

3. एक चर वाली रैखिक समीकरण :

समीकरण $ax + b = 0$, जहाँ $a, b \in R$ चर x में रैखिक समीकरण है अर्थात् एक अज्ञात चर वाली समीकरण को एक चर वाली समीकरण कहा जाता है।

जैसे—$x + 3 = 15$ एक चर वाली रैखिक समीकरण है।

4. दो चरों वाले रैखिक समीकरण :

(i) एक ऐसा समीकरण जिसका लेखाचित्र एक सरल रेखा को प्रदर्शित करता है, रैखिक समीकरण कहलाता है।

(ii) ऐसे दो रैखिक समीकरण जिसमें दो समान चर राशियाँ हों तथा जो चर राशियों के एक ही मानों द्वारा संतुष्ट हों उन्हें दो चर राशियों वाला रैखिक समीकरण कहते हैं। उन्हें **रैखिक युगपत समीकरण** भी कहा जाता है।

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

जहाँ पर $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्यायें हैं तथा $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ और $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ उपर्युक्त समीकरण युग्म, युगपत समीकरण का मानक रूप है।

(iii) दो रैखिक समीकरण

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के लिए—

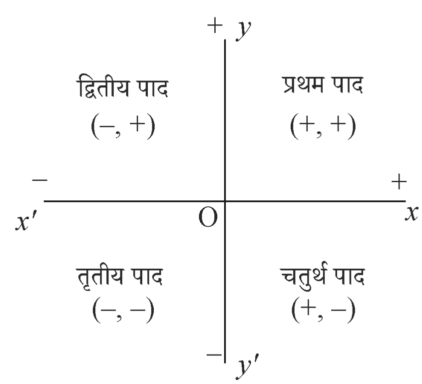
✧ यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो तो **अद्वितीय हल** प्राप्त होगा। युग्म संगत होगा। **प्रतिच्छेद रेखाएँ** होगी।

✧ यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो तो **अपरिमित रूप से अनन्त हल** प्राप्त होंगे। **युग्म संगत** होगा, **संपाती रेखाएँ** होगी।

✧ यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो तो **कोई हल प्राप्त नहीं** होगा। युग्म **असंगत** होगा क्योंकि इनका ग्राफ **समांतर रेखाओं** को प्रदर्शित करेगा।

5. युगपत् समीकरणों को हल करने की विधियाँ :

(i) लेखाचित्र द्वारा हल करना : युगपत् समीकरणों को लेखाचित्र से प्रदर्शित करने के लिए रेखाचित्र के चार पादों में अग्र प्रकार प्रदर्शित करते हैं—



4 द्विघात समीकरण [Quadratic Equations]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)**—वह समीकरण जिसमे अधिकतम दो घात का पद हो द्विघात समीकरण कहलाती है। जैसे—
$3x^2 - 5 = 0$, $2x^2 + 3x + 4 = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं।

❖ **द्विघात समीकरण का मानक रूप**—

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

बहुपद द्विघात बहुपद का मानक रूप है।
यदि f(x) एक द्विघात बहुपद है तो f(x) = 0 एक द्विघात समीकरण कहलाता है अर्थात् $ax^2 + bx + cx = 0$, एक द्विघात समीकरण है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्यायें हैं तथा $a \neq 0$ यदि f(x) के पदों के घातों के घटते क्रम में व्यवस्थित करें तो f(x) = 0 अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है।

❖ **द्विघात समीकरण के प्रकार (Types of Quadratic Equation)**

✧ **अपूर्ण द्विघात समीकरण (Incomplete Quadratic Equation):** ऐसी द्विघात समीकरण जिसमें व्यापक द्विघात समीकरण के सारे पद उपस्थित न हों अपूर्ण द्विघात समीकरण कहलाती है। जैसे—
$3x^2 - 7 = 0$, $x^2 + 4x = 0$

✧ **विशुद्ध द्विघात समीकरण (Pure Quadratic Equation):** वह द्विघात समीकरण जिसमें एक घात वाला पद न हो विशुद्ध द्विघात समीकरण कहलाता है। जैसे—
$x^2 + 5 = 0$, $3x^2 - 8 = 0$, $ax^2 + c = 0$

✧ **पूर्ण द्विघात समीकरण (Complete Quadratic Equation):** वह द्विघात समीकरण जिसमें व्यापक द्विघात समीकरण के सभी पद उपस्थित हों पूर्ण द्विघात समीकरण कहलाती है। जैसे—
$x^2 + 3x + 2 = 0$, $x^2 - x + 1 = 0$

❖ **द्विघात समीकरणों के हल गुणनखण्ड विधि (Factor Method) द्वारा**—यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ है तो इसका हल गुणनखण्ड विधि से निकाला जा सकता है जब $b^2 - 4ac > 0$, अर्थात् धनात्मक हो,
इस विधि में, सबसे पहले a, b तथा c पता लगा करके ac ज्ञात करते हैं पुनः ac को दो खण्डों में ऐसे विभक्त करते हैं कि दोनों खण्डों का योग b के बराबर हो। अब समीकरण के मध्य पद को इन खण्डों के प्रयोग से दो भागों में व्यक्त कीजिए। इस प्रकार, समीकरण में कुल चार पद बन जायेंगे। दो युग्म पदों से उभयनिष्ठ लेने पर हमें दो रैखिक व्यंजक प्राप्त होंगे। बारी-बारी से एक-एक रैखिक बहुपद को शून्य के बराबर रखकर हल करने पर हमें समीकरण के दो मान प्राप्त होते हैं।
उदाहरणार्थ-
यदि $x^2 - 7x + 12 = 0$ द्विघात समीकरण है तो, यहाँ पर a = 1, b = –7, c = 12 है।
$\therefore\ ac = 1 \times 12 = 12$
12 के दो गुणनखण्ड –3 तथा –4 है जिसका योग –7 अर्थात् b के बराबर है।
अतः $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$
$\Rightarrow x(x-3) - 4(x-3) = 0$
$\Rightarrow (x-3)(x-4) = 0$
यदि $x - 3 = 0$ हो तो $x = 3$
यदि $x - 4 = 0$ हो तो $x = 4$
$\therefore$ समीकरण $x^2 - 3x + 12 = 0$ के दो मूल 3 तथा 4 हैं।

❖ **द्विघात समीकरणों के हल श्रीधराचार्य की सूत्र विधि (Formula Method) द्वारा**—$ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac = 0$

$$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

धन और ऋण चिह्नों को अलग करने पर x के दो मान प्राप्त होंगे जिन्हें हम समीकरण का मूल कहते हैं। इन मूलों को हम α एवं β से प्रदर्शित करते हैं। $b^2 - 4ac$ को विविक्तकर कहते हैं। जिसे $D = b^2 - 4ac$ के रूप में लिखते हैं।

❖ **द्विघात समीकरणों के हल पूर्ण वर्ग बनाकर (By completing perfect square)**—इस विधि में, अज्ञात राशि वाले पदों को बांये पक्ष में लेकर पूर्ण वर्ग बना लेते हैं और फिर दोनों ओर का वर्गमूल निकालते हैं।

❖ **मूलों का योग, गुणनफल एवं अन्तर (Sum, Product and Difference of Roots) द्वारा**—यदि α तथा β किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ मूल हों तो

5 लघुगणक [Logarithms]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

- 'लघुगणक' का प्रतिपादन स्कॉटलैंड निवासी **जॉन नेपियर** द्वारा किया गया। यह ऐसी गणितीय युक्ति है जिसके प्रयोग से गणनाओं को छोटा किया जा सकता है। इसके प्रयोग से गुणा और भाग जैसी जटिल प्रक्रियाओं को जोड़ एवं घटाव जैसी अपेक्षाकृत सरल क्रियाओं में बदल दिया जाता है। कम्प्यूटर और कैलकुलेटर के प्रचलन में आने से पहले जटिल गणितीय गणनाएँ लघुगणक के माध्यम से ही की जाती थी।
- यदि किसी धनात्मक वास्तविक संख्या $a(\neq 1)$ के लिए $a^m = b$ हो, तो सूचकांक (घातांक) m को आधार a पर b का **लघुगणक** कहा जाता है। इसको हम इस प्रकार से लिखते हैं :
  $\log_a b = m$. 'log' 'logarithm' (लघुगणक) शब्द का संक्षित रूप है। इसलिए $a^m = b \Leftrightarrow \log_a b = m$
  जहाँ, $a^m = b$ को घातीय (या घातांकीय) रूप और $\log_a b = m$ को लघुगणकीय रूप कहते हैं।
  64 का आधार 4 पर लघुगणक (log), 3 है क्योंकि $(4)^3 = 64$
  उदाहरण के लिए—
  (i) $10^2 = 100$; $\therefore \log_{10} 100 = 2$
  (ii) $5^1 = 5$; $\therefore \log_5 5 = 1$
  (iii) $10^{-1} = 1$; $\therefore \log_{10} 1 = -1$
- लघुगणक के दो आधार आज बहुतायत से प्रयोग किए जाते हैं। एक आधार है e (e = 2. 71828 सन्निकट) है और दूसरा आधार 10 है। e आधार के लघुगणक प्राकृतिक लघुगणक और 10 आधार के लघुगणक सामान्य लघुगणक कहलाते हैं।
  $\log_{10} 10 = 1$, चूँकि $10^1 = 10$ है।
  $\log_{10} 100 = 2$, चूँकि $10^2 = 100$ है।
  $\log_{10} 10000 = 4$, चूँकि $10^4 = 10000$ है।
  $\log_{10} 0.01 = -2$, चूँकि $10^{-2} = 0.01$ है।
  $\log_{10} 0.001 = -3$, चूँकि $10^{-3} = 0.001$ है।
  और $\log_{10} 1 = 0$ चूँकि $10^0 = 1$ है।
- लघुगणक 1 (log 1) का Characteristic 0 है।
- जब $x > 1$ हो तो log x का Characteristic, x के पूर्णांक हिस्से में अंकों की संख्या से 1 कम होता है।
- यदि $0 < x < 1$ हो तो log x का Characteristic, ऋणात्मक होता है और वह दशमलव के बाद शून्यों की संख्या से एक अधिक होगा।
- Antilogarithms : वह संख्या जिसका लघुगणक x है उसे x का Antilogarthms कहते हैं जिसे Antilog x के रूप में लिखते हैं, इस प्रकार यदि log y = x, तो Antilog x = y
  यदि n = 539.6 हो तो
  $\log n = \log (5.396 \times 10^2)$, यहाँ पर p = 2 Characteristic है और 5.396 mantissa है।

लघुगणक के नियम

- **गुणन सूत्र**—किन्हीं दो संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक उन संख्याओं के लघुगणकों के योग के बराबर होता है। अर्थात्
  $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ है।
  व्यापक रूप में,
  $\log_a (mnpq \ldots)\ \log_a m + \log_a n + \log_a p + \log_a q + \ldots$
- **भागफल सूत्र**—किन्हीं दो संख्याओं के भागफल का लघुगणक उन संख्याओं के लघुगणकों के अंतर के बराबर होता है।
  अर्थात् $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ है,
  जहाँ a, m, n धनात्मक हैं तथा $a \neq 1$ है।
- **घात सूत्र**—किसी संख्या, जिस पर घात लगी हो, का लघुगणक, घात और संख्या के लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है।
  अर्थात् $\log_a (m^n) = n \log_a m$ है,
  जहाँ a, m धनात्मक हैं और $a \neq 1$ है।
- **आधार बदलने का सूत्र**
  $\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}$ है। अतः, $\log_n m = \frac{\log m}{\log n}$ है,
  जहाँ m, n, a धनात्मक हैं और $n \neq 1, a \neq 1$ है।
- **व्युत्क्रम सम्बन्ध**
  $\log_b a \times \log_a b = 1$ है,
  जहाँ a, b धनात्मक हैं और 1 के बराबर नहीं हैं।
- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
- $\log_a x = x$, जहाँ a और x धनात्मक हैं, $a \neq 1$ है।
- यदि $a > 1$ और $x > 1$ है तो $\log_a x > 0$ है।
- यदि $0 < a < 1$ और $0 < x < 1$ है, तो $\log_a x > 0$ है।
- यदि $0 < a < 1$ और $x > 1$ है, तो $\log_a x > 0$ है।
- यदि $a > 1$ और $0 < x < 1$ है, तो $\log_a x < 0$ है।
- किसी भी आधार पर 1 का लघुगणक शून्य के बराबर होता है। अर्थात् $\log_a 1 = 0$, जहाँ $a > 0, a \neq 1$ है।
- किसी भी संख्या का उसी संख्या के आधार पर लघुगणक 1 होता है। अर्थात् $\log_a a = 1$ है, जहाँ $a > 0, a \neq 1$ है।

6 अनुपात एवं समानुपात [Ratio and Proportion]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

अनुपात (Ratio)

- ❖ वह गणितीय व्यंजक जो समान ईकाई की दो असमान राशियों के बीच सम्बन्ध या तुलना को दिखाता है, **अनुपात** कहलाता है।
- ❖ अनुपात के द्वारा हमें इस बात की जानकारी प्राप्त होती है कि दो राशियों में कौन अधिक, कम या कितना गुना अधिक या कम है। इसे दो राशियों के बीच (:) चिह्न रखकर सूचित किया जाता है। इस चिह्न को 'इज टू' (is to) पढ़ा जाता है।
- ❖ अतः m अनुपात n को m : n या m/n द्वारा सूचित करते हैं। अनुपात के प्रथम पद (m) को **पूर्व पद** (antecedent) तथा द्वितीय पद (n) को **अंतिम पद** (consequent) कहा जाता है।

अनुपात के गुण (Properties of Ratio)

- ❖ अनुपात की कोई इकाई नहीं होती है क्योंकि अनुपात सजातीय राशियों के बीच होता है।
- ❖ दो सजातीय राशियों का अनुपात एक भिन्न होगी, जिसमें अंश पूर्व पद तथा हर अंतिम पद होता है।
- ❖ अनुपात के पदों को समान संख्या से गुणा या भाग देने पर मान में कोई अन्तर नहीं होता है।
- ❖ सामान्यतया अनुपात के पदों में से उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को हटाकर सूक्ष्म रूप में लिखते हैं।

अनुपात के प्रकार (Type of Ratios)

- ❖ **मिश्रित अनुपात (Mixed Ratio) :** दो या दो से अधिक अनुपातों के पूर्व पदों के गुणनफल और अन्तिम पदों के गुणनफल में जो अनुपात बनता है उसे मिश्रित अनुपात कहा जाता है।
  जैसे—a : b, c : d का मिश्रित अनुपात (a . c) : (b . d) है इसी प्रकार 2 : 3, 5 : 7 का मिश्रित अनुपात (2 × 5) : (3 × 7) अर्थात 10 : 21 है।
- ❖ **वर्गानुपात (Duplicate Ratio) :** किसी अनुपात के पूर्व पद तथा अंतिम पदों के वर्गों से बना अनुपात वर्गानुपात होता है। जैसे अनुपात 3 : 5 का वर्गाअनुपात $(3)^2 : (5)^2$ यानि 9 : 25 है।
- ❖ **वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio) :** किसी अनुपात के पूर्व पद तथा अंतिम पद के वर्गमूलों से बना अनुपात वर्गमूलानुपात कहलाता है।
  जैसे—अनुपात 4 : 9 का वर्गमूलानुपात $\sqrt{4}:\sqrt{9}$ अर्थात् 2 : 3 है।
- ❖ **घनानुपात (Triplicate Ratio) :** किसी अनुपात के पूर्व पद तथा अंतिम पद के घनों से बना अनुपात घनानुपात कहलाता है।
  जैसे—2 : 3 का घनानुपात $2^3 : 3^3$ यानि 8 : 27 है।
- ❖ **घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio) :** किसी अनुपात के पूर्व पद तथा अन्तिम पद के घनमूलों से बना अनुपात घनमूलानुपात कहलाता है।
  जैसे—64 : 125 का तिहाई अनुपात $\sqrt[3]{64}:\sqrt[3]{125}$ यानि 4 : 5 है।
- ❖ **विलोमानुपात (Inverse Ratio) :** किसी अनुपात के पदों को उलटा करके रखने पर प्राप्त अनुपात विलोमानुपात कहलाता है।
  जैसे—2 : 3 का विलोमानुपात 3 : 2 है।

समानुपात (Proportion)

- ❖ यदि दो अनुपात एक दूसरे के समान हो तो उनके चारों पद समानुपाती होते हैं। समानुपात के लिए (: :) चिह्न का प्रयोग किया जाता है। इस चिह्न को 'एज' (as) पढ़ा जाता है।
- ❖ यदि अनुपात a : b : : c : d समान है अर्थात् a : b = c : d है तो इसे a : b : : c : d के रूप में लिखा जाता है। यहाँ पर a, b, c तथा d परस्पर समानुपाती है। a तथा d बाह्य पद है तथा b तथा c मध्य पद है। d को चतुर्थानुपाती (Fourth Proportional) कहा जाता है। जब चार राशियाँ समानुपाती होती है, तो
  बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल
  यदि a : b : : c : d हो तो $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c$
- ❖ **योगान्तर निष्पति (Componendo-Dividendo) :** यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ हो तो $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ योगान्तर निष्पति कहलाती है।
- ❖ **विततानुपात (Continued Proportion) :** यदि तीन सजातीय राशियाँ इस प्रकार की हो कि प्रथम राशि तथा द्वितीय राशि का अनुपात और द्वितीय राशि तथा तृतीय राशि के अनुपात के बराबर हो तो वे राशियाँ विततानुपाती कहलाती हैं।
  यदि a, b तथा c विततानुपाती है तो $a : b = b : c \Rightarrow a \times c = b \times b$ $\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$ यहाँ पर b को **मध्यानुपाती** (Mean Proportional) कहते हैं। c को a तथा b का तृतीयानुपाती कहा जाता है।
  नोट—मध्यानुपाती हमेशा पहली तथा तीसरी राशि के गुणनफल का वर्गमूल होता है।
- ❖ **अनुलोमानुपात (Direct Proportion) :** यदि दो राशियाँ इस प्रकार परस्पर सम्बन्धित हों कि एक राशि के बढ़ने या घटने पर दूसरी राशि उसी अनुपात में बढ़े या घटे तो वे राशियाँ अनुलोमानुपाती कहलाती है।
- ❖ **प्रतिलोमानुपात (Inverse Proportion) :** यदि दो राशियाँ इस प्रकार परस्पर सम्बन्धित हो कि एक राशि के बढ़ने या घटने पर दूसरी राशि उसी अनुपात में घटे या बढ़े तो वे राशियाँ परस्पर प्रतिलोमानुपाती या विलोनुपाती कहलाती है।
- ❖ **मिश्र अनुपात (Compound Proportion) :** यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ इस प्रकार हो कि किसी एक राशि का मान, शेष राशियों के मान पर आश्रित हो तो वे राशियाँ मिश्र समानुपात में होगी। मिश्र अनुपात को जटिल अनुपात भी कहा जाता है।

7 प्रतिशत [Percentage]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **प्रतिशत (Percentage)** : किसी भी राशि या मात्रा को 100 के आधार पर व्यक्त करने की क्षमता **प्रतिशत** कहलाती है।

❖ **प्रतिशत निकालने का गणितीय सूत्र**

(i) x, y का $\frac{x}{y}\times100\%$ है।

(ii) x का y% = $\frac{xy}{100} = y$ का x%

जैसे—300, 500 का $\frac{300}{500}\times100\% = 60\%$ है।

500, 300 का $\frac{500}{300}\times100\% = 166\frac{2}{3}\%$

40 का 20% = $40\times\frac{20}{100} = 8$ है।

❖ **प्रतिशत को भिन्न तथा भिन्न को प्रतिशत में बदलना**

(i) $x\% = \frac{x}{100}$ (ii) $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}\times100\%$

जैसे— ✧ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times100\% = 50\%$

✧ $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}\times100\% = \frac{75}{2}\% = 37\frac{1}{2}\%$

✧ $12\frac{1}{4}\% = \frac{49}{4}\% = \frac{49}{4}\times\frac{1}{100} = \frac{49}{400}$

✧ $87.5\% = \frac{87.5}{100} = \frac{7}{8}$

❖ **इकाई का प्रयोग**

प्रतिशत निकालते वक्त समान इकाई प्रयुक्त होनी चाहिए, जैसे 10 पैसा 10 रुपये का कितना प्रतिशत है, यह जानने के लिए हमें निकालना होगा कि 10 पैसा, 1000 पैसा (= ₹10) का कितना प्रतिशत है तथा अभीष्ट प्रतिशत $\frac{10}{1000}\times100\% = 1\%$ होगा।

❖ **प्रतिशत को भिन्न के रूप में बदलना**

किसी प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए उसे 100 से भाग दिया जाता है।

$$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$13\% = \frac{13}{100}$$

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$$

❖ **भिन्न को प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना**

किसी भिन्न को प्रतिशत के रूप में बदलने के लिए उसे 100 से गुणा किया जाता है।

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\times100 = 80\%$$

$$\frac{4}{25} = \frac{4}{25}\times100 = 16\%$$

❖ **प्रतिशत को दशमलव के रूप में व्यक्त करना**

किसी प्रतिशत को दशमलव में व्यक्त करने के लिए दशमलव को उस संख्या से दो अंक Right से Left ले आते हैं। जैसे—

4% = .04
100% = 1
25% = 0.25
20% = 0.20

❖ **दशमलव को प्रतिशत के रूप में लिखना**

किसी दशमलव अंक को प्रतिशत में बदलने के लिए दशमलव अंक में 100 से गुणा करते हैं तथा प्राप्त फल के बाद प्रतिशत का चिह्न लगा देते हैं।

जैसे— $0.25 \Rightarrow 0.25\times100\% = 25\%$

बहुविकल्पीय प्रश्नोत्तर

1. यदि एक परीक्षा में 2500 विद्यार्थियों में 400 असफल रहे हों तो पास होने वालों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए—

(A) 84% (B) 87% (C) 88% (D) 95% **[A]**

व्याख्या—2500 − 400 = 2100 विद्यार्थी सफल हुए।

∵ 2500 विद्यार्थियों में से सफल हुए विद्यार्थी = 2100

∴ 1 विद्यार्थी में से सफल हुए विद्यार्थी = $\frac{2100}{2500}$

∴ 100 विद्यार्थियों में से सफल हुए विद्यार्थी

$$= \frac{2100}{2500}\times100 = 84\%$$

8 लाभ एवं हानि [Profit and Loss]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ क्रय मूल्य (CP) = विक्रय मूल्य (SP) – लाभ (P)
❖ क्रय मूल्य (CP) = विक्रय मूल्य (SP) + हानि (L)
❖ लाभ (P) = विक्रय मूल्य (SP) – क्रय मूल्य (CP)
❖ हानि (L) = क्रय मूल्य (CP) – विक्रय मूल्य (SP)
❖ प्रतिशत लाभ $= \frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$
❖ प्रतिशत हानि $= \frac{\text{हानि} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$
❖ % लाभ-हानि व विक्रय मूल्य ज्ञात होने पर क्रय मूल्य ज्ञात करना

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{100}{100+\text{लाभ}\%} \times \text{विक्रय मूल्य}$$

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{100}{100-\text{हानि}\%} \times \text{विक्रय मूल्य}$$

❖ % लाभ-हानि व क्रय मूल्य ज्ञात होने पर विक्रय मूल्य ज्ञात करना

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{100+\text{लाभ}\%}{100} \times \text{क्रय मूल्य}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{100-\text{हानि}\%}{100} \times \text{क्रय मूल्य}$$

❖ यदि क्रमिक बट्टे x% तथा y% हो तो,

$$\text{समतुल्य बट्टा} = (x+y) - \frac{xy}{100}$$

❖ यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹ x हो तथा उस पर y% तथा z% का बट्टा उपलब्ध हो तो

$$\text{विक्रय मूल्य} = x \times \frac{100-y}{100} \times \frac{100-z}{100}$$

❖ यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹ x है उस पर y% बट्टा देने के बाद z% लाभ हो तो,

$$\text{क्रयमूल्य} = \frac{x \times (100-y)}{100+z}$$

❖ यदि कोई वस्तु अंकित मूल्य पर x% छूट देने के बाद ₹ y में बेची जाती है तो

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{y \times 100}{100-x}$$

❖ यदि किसी वस्तु पर x% छूट देकर y% लाभ प्राप्त हो तो अंकित मूल्य को क्रय मूल्य का कितना प्रतिशत बढ़ाना पड़ेगा।

$$\text{अभीष्ट वृद्धि } \% = \left(\frac{x+y}{100-x}\right) \times 100$$

❖ अंकित मूल्य, क्रय मूल्य से x% बढ़ाकर रखने के बाद y% की छूट के उपरान्त लाभ (हानि) प्रतिशत ज्ञात करना हो तो।

$$\text{अभीष्ट लाभ/हानि } \% = (x-y) - \frac{x \times y}{100}$$

(यहाँ '+' चिह्न लाभ तथा '–' चिह्न हानि को प्रदर्शित करेगा।)

❖ जब x वस्तुएं खरीदने पर y वस्तु मुफ्त में मिले तो

$$\text{बट्टा प्रतिशत} = \frac{y}{x+y} \times 100$$

❖ यदि किसी वस्तु का क्रय मूल्य ₹ x हो तो y% की छूट देकर z% लाभ प्राप्त करने हेतु

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{x \times (100+z)}{100-y}$$

बहुविकल्पीय प्रश्नोत्तर

1. एक व्यक्ति ₹10 की 11 मोमबत्तियों की दर से मोमबत्तियाँ खरीदता है तथा इन्हें ₹11 की 10 मोमबत्तियों की दर से बेचता है। उसका लाभ प्रतिशत में क्या है?

(A) 10% (B) 40% (C) 9% (D) 21% **[D]**

व्याख्या—

₹	मात्रा
10	11
11	10

क्रय मूल्य = 10 × 10 = 100
विक्रय मूल्य = 11 × 11 = 121

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{121-100}{100} \times 100 = 21\%$$

2. उत्कर्ष एक टीवी उसके अंकित मूल्य के 3/4 मूल्य पर खरीदता है। वह अंकित मूल्य से 20% अधिक पर इसे बेचता है, तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करो—

(A) 20% (B) 45% (C) 60% (D) 75% **[C]**

व्याख्या—माना टी.वी. का अंकित मूल्य x है—

$$\text{क्रयमूल्य} = \frac{3}{4}x$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{x \times 120}{100} = \frac{6x}{5}$$

9 साझा [Partnership]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **साझा (Partnership):** जब दो या दो से अधिक व्यक्ति अपनी-अपनी पूँजी लगाकर सम्मिलित रूप से व्यापार शुरु करते हैं, तो वे साझेदार कहलाते हैं तथा उनके द्वारा किया गया यह कार्य साझेदारी कहलाता है।

❖ **सरल साझा (Simple Partnership):** जब सभी साझेदार अपनी-अपनी पूँजी समान समय के लिये लगाते हैं तो उसे सरल साझेदारी कहते हैं।

❖ सरल साझेदारी के व्यापार से प्राप्त लाभ/हानि को साझेदारों द्वारा लगाई गई पूँजी के अनुपात में बाँटा जाता है।

❖ **समान काल का साझा (Partnership of Equal Time):** इस प्रकार के व्यापार में प्रत्येक साझेदार की पूँजी समान समय के लिये लगी रहती है। यदि A तथा B के समान समय के लिये क्रमशः ₹ x व ₹ y व्यापार में लगाये तो

$$\frac{\text{A का लाभांश}}{\text{B का लाभांश}} = \frac{\text{A की पूँजी}}{\text{B की पूँजी}} = \frac{x}{y}$$

❖ **समान पूँजी का साझा (Partnership of Equal Amount):** इस प्रकार के व्यापार में प्रत्येक साझेदार की पूँजी समान रहती है तथा कुल लाभ/हानि समय के अनुपात में विभाजित होता है।
यदि A तथा B में समान पूँजी क्रमशः t_A माह व t_B माह के लिये लगायी तो

$$\frac{\text{A का लाभांश}}{\text{B का लाभांश}} = \frac{\text{A द्वारा लगायी पूँजी के माह}}{\text{B द्वारा लगायी पूँजी के माह}} = \frac{t_A}{t_B}$$

❖ **मिश्र साझा (Compound Partnership):** यदि सभी साझेदार अपनी-अपनी पूँजी भिन्न-भिन्न समयों के लिये व्यापार में लगाते है तथा उनकी पूँजी भी समान नहीं होती हैं ऐसी साझेदारी को मिश्र/जटिल साझेदारी कहते हैं।

❖ जटिल साझेदारी में व्यापार से प्राप्त लाभ/हानि को साझेदारों द्वारा लगाई गई पूँजी तथा समय के गुणनफल के अनुपात में बाँट दिया जाता है। यदि A ने अपनी पूँजी ₹ x t_A माह के लिये तथा B ने अपनी पूँजी ₹ y t_B माह के लिये व्यापार में लगायी तो

$$\frac{\text{A का लाभांश}}{\text{B का लाभांश}} = \frac{\text{A की पूँजी} \times \text{A का साझा में समय}}{\text{B की पूँजी} \times \text{B का साझा में समय}} = \frac{x \times t_A}{y \times t_B}$$

❖ **सक्रिय साझेदार (Active Partner):** व्यापार को सुचारु रूप से चलाने के लिये जो साझेदार पूँजी लगाने के अतिरिक्त व्यापार संबंधित निर्णय लेता है तथा उसकी देखभाल करता है, उसे सक्रिय साझेदार कहते हैं।

❖ सक्रिय साझेदार को पारिश्रमिक देने के बाद बचे शेष लाभ को सक्रिय साझेदार सहित अन्य साझेदारों के साथ वितरित कर दिया जाता है।

❖ **निष्क्रिय/शान्त साझेदार (Inactive Partner):** व्यापार को सुचारु रूप से चलाने के लिये जो साझेदार केवल पूँजी लगाता है व्यापार संबंधित निर्णय/देखभाल नहीं करता है, उसे निष्क्रिय/शान्त साझेदार कहते हैं। व्यापार में उसे उसकी पूँजी के अनुसार लाभ/हानि प्राप्त होता है।

❖ लाभांश का अनुपात ज्ञात होने पर प्रत्येक साझेदार का भाग अनुपात समानुपात के सूत्रों का उपयोग करके प्राप्त किया जाता है।

❖ यदि A और B साझेदार की पूँजियों का अनुपात a : b समान समय के लिये है। और कुल लाभ ₹ x हैं तो उनका लाभ का अनुपात भी a : b होगा।

$$\text{A का लाभ में भाग} = \frac{\text{A का अनुपात का मान}}{\text{अनुपातों का योग}} \times \text{कुल लाभ राशि}$$

$$= ₹\frac{a}{a+b} \times x$$

$$\text{B का लाभ में भाग} = \frac{\text{B के अनुपात का मान}}{\text{अनुपातों का योग}} \times \text{कुल लाभ राशि}$$

$$= ₹\frac{b}{a+b} \times x$$

बहुविकल्पीय प्रश्नोत्तर

1. मुरलीधर ने ₹ 30,000 लगाकर एक दुकान आरम्भ की। दो माह बाद ₹ 45,000 लगाकर राजू इस दुकान में साझीदार हो गया। एक वर्ष के अन्त में कुल ₹ 54,000 के लाभ में से राजू का भाग क्या होगा—

(A) ₹20,000 (B) ₹25,000
(C) ₹30,000 (D) ₹35,000 **[C]**

व्याख्या—मुरलीधर तथा राजू की पूँजियों का अनुपात

$= (30000 \times 12 : 45000 \times 10)$
$= 4 : 5$

$$\therefore \quad \text{राजू का भाग} = \left(54000 \times \frac{5}{9}\right) = ₹\ 30{,}000$$

2. A तथा B ने क्रमशः ₹ 16000 तथा ₹ 12000 लगाकर व्यापार आरम्भ किया। 3 माह बाद A ने ₹ 5000 निकाल लिये जबकि B ₹ 5000 और लगा दिये। इसके 3 माह बाद C भी ₹ 21000 लगाकर व्यापार में शामिल हो गया। एक वर्ष बाद ₹ 26,400 के लाभ में से B का भाग C के भाग से कितना अधिक है—

(A) ₹2500 (B) ₹3600 (C) ₹3800 (D) ₹4000 **[B]**

10 साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज [Simple and Compound Interest]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

सरल ब्याज

❖ **ब्याज (Interest) :** जब कोई व्यक्ति दूसरे के धन का उपयोग अपने कार्य के लिये करता है तो उसे इस धन का उपयोग करने के बदले में, दूसरे व्यक्ति को किराया देना पड़ता है। इस किराये को हम **ब्याज** कहते हैं। इसे I से प्रदर्शित किया जाता है।

❖ **मूलधन (Principal) :** जब कोई व्यक्ति अथवा संस्था अपनी जरूरत के अनुसार किसी बैंक, सहकारी संस्था या अन्य व्यक्ति से उधार लेता है तो उधार ली गई राशि को **मूलधन** कहते हैं। इसे P से प्रदर्शित किया जाता है।

❖ **मिश्रधन (Amount) :** मूलधन तथा ब्याज सहित जो राशि वापस की जाती है, उसे **मिश्रधन** कहते हैं। इसे A से प्रदर्शित किया जाता है।

❖ **ब्याज की दर (Rate of Interest) :** जिस हिसाब से ब्याज लगाया जाता है, उसे ब्याज दर कहते हैं जिसे प्रतिशत में दर्शाया जाता है। प्रतिशत दर का अभिप्राय 100 रुपये का एक वर्ष के ब्याज से है। इसे R से प्रदर्शित किया जाता है।

❖ **समय (Time) :** उधार ली गयी राशि और वापिस की गयी राशि (चुकायी गयी राशि) के बीच के अन्तराल को समय कहते हैं। इसे T से प्रदर्शित किया जाता है।

❖ **साधारण ब्याज (Simple Interest) :** मूलधन पर जब ब्याज एक निश्चित समय के लिये लगाया जाता है तो उसे साधारण ब्याज कहा जाता है। मूलधन को समय एवं ब्याज की दर से गुणा करके 100 से भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है वही अपेक्षित **साधारण ब्याज** होता है।

❖ जब दो तिथियों के बीच समय निकालना हो तो उधार देने वाली तिथि को न जोड़कर केवल चुकाने वाली तिथि को ही जोड़ते हैं।
जैसे - 15 मार्च 2017 को राशि उधार दी गई तथा 20 नवम्बर, 2017 को राशि लौटाई तो समय
मार्च + अप्रैल + मई + जून + जुलाई + अगस्त + सितम्बर + अक्टूबर + नवम्बर
16 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 20 = 250 दिन
वर्ष बनाने के लिए 365 का भाग देते हैं।

$$\text{अर्थात्} = \frac{250}{365} = \frac{50}{73} \text{ वर्ष}$$

महत्त्वपूर्ण सूत्र

✧ मिश्रधन = मूलधन + ब्याज $(A = P + I)$

✧ ब्याज = मिश्रधन – मूलधन $(I = A - P)$

✧ मूलधन = मिश्रधन – ब्याज $(P = A - I)$

✧ $\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$ अर्थात् $I = \frac{P \times R \times T}{100}$

✧ $\text{मूलधन} = \frac{100 \times \text{ब्याज}}{\text{समय} \times \text{दर}}$ $\quad P = \frac{100 \times I}{T \times R}$

✧ $\text{समय} = \frac{100 \times \text{ब्याज}}{\text{मूलधन} \times \text{दर}}$ $\quad T = \frac{100 \times I}{P \times R}$

✧ $\text{दर} = \frac{100 \times \text{ब्याज}}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$ $\quad P = \frac{100 \times I}{P \times T}$

चक्रवृद्धि ब्याज

❖ जब निश्चित अवधि में ब्याज न चुकाया जाये और संचित ब्याज की राशि को मूलधन में मिलाकर ब्याज की गणना की जाये तो ऐसे ब्याज को **चक्रवृद्धि ब्याज** कहते हैं। संक्षेप में चक्रवृद्धि ब्याज को C.I. से व्यक्त करते हैं।

❖ यदि ब्याज चुकाने की अवधि वार्षिक हो तो पहले वर्ष का मिश्रधन दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है और दूसरे वर्ष का मिश्रधन, तीसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

❖ यदि P = मूलधन, R = ब्याज की दर तथा T समय हो तो

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन } (1 + \text{दर})^{\text{समय}}$$

$$A = P(1 + R)^T$$

❖ चक्रवृद्धि ब्याज = (चक्रवृद्धि मिश्रधन – मूलधन)

अर्थात् $\quad C.I. = A - P$

या $\quad C.I. = P(1 + R)^T - P$

$\quad C.I. = P[(1 + R)^T - 1]$

❖ जब ब्याज की दर वार्षिक हो तो पहले वर्ष में साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज दोनों बराबर होते हैं तथा दोनों मिश्रधन भी समान होंगे।

❖ यदि मूलधन ₹ P हो, दर r% वार्षिक हो तथा समय n वर्ष हो तो

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन (A)} = P\left[1 + \frac{r}{100}\right]^n$$

11 बट्टा/छूट [Discount]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **बट्टा (Discount):** बट्टे का तात्पर्य किसी वस्तु के लिखित मूल्य में छूट से है। छूट प्रति सैकड़े निर्धारित की जाती है। जिसे **बट्टे की दर** के रूप में जाना जाता है।

❖ **अंकित मूल्य या सूची मूल्य (Marked Price or Listed Price):** यह वह मूल्य है जो किसी वस्तु पर या उसके पैकेट पर लिखा या अंकित रहता है।

❖ बट्टे का आकलन सदैव अंकित मूल्य (लिखा हुआ मूल्य) पर किया जाता है।

$$\text{बट्टा की प्रतिशत दर} = \frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$$

❖ **बट्टा श्रेणी (Discount Series)**—जब किसी वस्तु पर दो या दो से अधिक बट्टे एक साथ दिये जाय तो उसे बट्टा श्रेणी कहते हैं। जैसे 5%, 10% बट्टा श्रेणी के बराबर एकल बट्टे को **समतुल्य बट्टा** कहा जाता है। बट्टा सदैव अंकित मूल्य पर होता है। समतुल्य बट्टा सदैव बट्टा श्रेणी के प्रतिशत दरों के योग से कम होता है।

महत्वपूर्ण सूत्र

❖ यदि क्रमिक बट्टे x% तथा y% हो तो,

$$\text{समतुल्य बट्टा} = (x+y) - \frac{xy}{100}$$

❖ यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹ x हो तथा उस पर y% तथा z% का बट्टा उपलब्ध हो तो

$$\text{विक्रय मूल्य} = x \times \frac{100-y}{100} \times \frac{100-z}{100}$$

❖ यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य ₹ x है उस पर y% बट्टा देने के बाद z% लाभ हो तो,

$$\text{क्रयमूल्य} = \frac{x \times (100-y)}{100+z}$$

❖ यदि कोई वस्तु अंकित मूल्य पर x% छूट देने के बाद ₹ y में बेची जाती है तो

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{y \times 100}{100-x}$$

❖ यदि किसी वस्तु पर x% छूट देकर y% लाभ प्राप्त हो तो अंकित मूल्य को क्रय मूल्य का कितना प्रतिशत बढ़ाना पड़ेगा।

$$\text{अभीष्ट वृद्धि \%} = \left(\frac{x+y}{100-x}\right) \times 100$$

❖ अंकित मूल्य, क्रय मूल्य से x% बढ़ाकर रखने के बाद y% की छूट के उपरान्त लाभ (हानि) प्रतिशत ज्ञात करना हो तो।

$$\text{अभीष्ट लाभ/हानि \%} = (x-y) - \frac{x \times y}{100}$$

(यहाँ '+' चिह्न लाभ तथा '–' चिह्न हानि को प्रदर्शित करेगा।)

❖ जब x वस्तुएं खरीदने पर y वस्तु मुफ्त में मिले तो

$$\text{बट्टा प्रतिशत} = \frac{y}{x+y} \times 100$$

❖ यदि किसी वस्तु का क्रय मूल्य ₹ x हो तो y% की छूट देकर z% लाभ प्राप्त करने हेतु

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{x \times (100+z)}{100-y}$$

बहुविकल्पीय प्रश्नोत्तर

1. 10% तथा 30% की क्रमवार कटौतियाँ, किस एकमात्र कटौती के समतुल्य है—

(A) 35% (B) 36% (C) 37% (D) 38% **[C]**

व्याख्या—एकमात्र बट्टा $= (10+30) - \frac{10 \times 30}{100} = 40–3=37\%$

2. किसी वस्तु की 10% तथा 10% की दो क्रमवार मूल्य वृद्धियाँ किस एकल मूल्य वृद्धि के समतुल्य है—

(A) 19% (B) 21% (C) 20% (D) 25% **[B]**

व्याख्या—एकल वृद्धि $= \left(100 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}\right) - 100$

$= 121 - 100 = 21\%$

3. श्रेणी बट्टा 20%, 10% के समतुल्य बट्टा कौन सा है—

(A) 25% (B) 27% (C) 28% (D) 30% **[C]**

व्याख्या— समतुल्य बट्टा $= (20+10) - \frac{20 \times 10}{100}$

$= 30 - 2 = 28\%$

4. एक व्यापारी 20%, 10% और 5% की क्रमिक छूट देता है। छूट की दर का एकल समतुल्य है—

(A) 35% (B) 31.6% (C) 32.4% (D) 30% **[B]**

व्याख्या—एकल समतुल्य बट्टा

12 रेखाएँ एवं कोण [Lines and Angles]

महत्वपूर्ण तथ्य

रेखाएँ (Lines)

- **रेखा (Line):** बिन्दु की गति द्वारा बना हुआ ऐसा पथ जिसमें केवल लम्बाई होती है परन्तु चौड़ाई एवं ऊँचाई न हो, रेखा कहलाती है। जैसे—AB एक रेखा है।

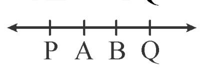
- **सरल रेखा (Straight Line):** ऐसी रेखा जो एक बिन्दु को दूसरे बिन्दु से बिना दिशा परिवर्तन किए न्यूनतम दूरी में मिलाये उसे सरल रेखा कहते हैं।

सरल रेखा   सरल रेखा

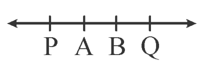
- **वक्र रेखा (Curved Line):** ऐसी रेखा जो एक बिन्दु को दूसरे बिन्दु से दिशा परिवर्तन करते हुए मिलाती हो उसे वक्र रेखा कहते हैं।

वक्र रेखा   वक्र रेखा

- **रेखाखण्ड (Line Segment):** यदि किसी रेखा PQ पर दो बिन्दु A तथा B लिया जाये तो AB को PQ का रेखाखण्ड कहते हैं।

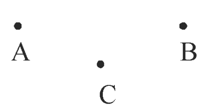


- **किरण (Ray):** रेखा का ऐसा खण्ड जिसके पास एक निश्चित बिन्दु हो, किरण कहलाता है। यहाँ चित्र में AP व BQ किरण है।



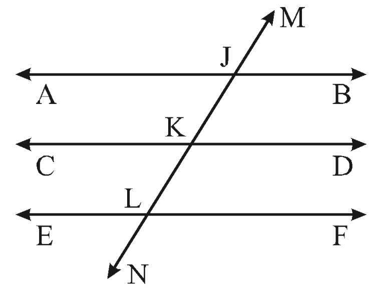
- **सरेख एवं असरेख बिन्दु (Collinear and Non-collinear Point):** यदि तीन या अधिक बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों, तो वे **सरेख बिन्दु** कहलाते हैं, अन्यथा वे **असरेख बिन्दु** कहलाते हैं।

सरेख बिन्दु

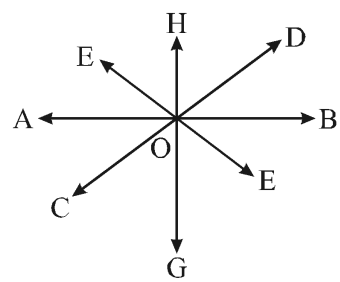


असरेख बिन्दु

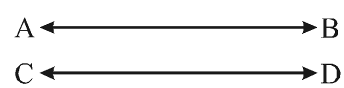
- **तिर्यक रेखा (Transversal Line):** दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटने वाली रेखा उनकी तिर्यक रेखा कहलाती है।



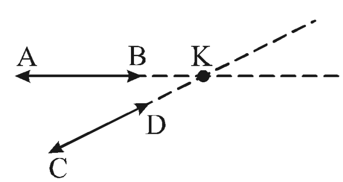
- यहाँ रेखा MN रेखा AB, CD व EF को अलग-अलग बिन्दुओं J, K व L पर काटती है अतः रेखा MN तिर्यक रेखा है।
- **संगामी रेखाएँ (Concurrent Lines):** वे रेखाएँ जो एक ही बिन्दु से गुजरती हैं संगामी रेखाएँ कहलाती हैं। जैसे–



- यहाँ रेखा AB, CD, EF व GH एक ही बिन्दु O से गुजर रही हैं अतः ये संगामी रेखाएँ हैं।
- **समान्तर रेखाएँ (Parallel Lines):** एक ही तल में स्थित वे रेखाएँ जो एक-दूसरे को नहीं काटती हैं उनकी लम्बवत् दूरी समान होती है, वे समान्तर रेखाएँ कहलाती है। जैसे–रेल की पटरी।



- **प्रतिच्छेदी रेखाएँ (Intersection Lines):** जब दो रेखाएँ आगे बढ़ाने पर किसी बिन्दु पर काटें तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं। जैसे—



13 समतलीय आकृतियाँ [Plane Figures]

महत्वपूर्ण तथ्य

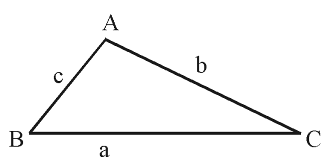
❖ ज्यामिति में समतल आकृतियों को द्विआयामी आकृति के नाम से भी जाना जाता है। ये आकृतियाँ एक सपाट द्विआयामी तल में होती है। इनमें मोटाई या गहराई नही होती।

❖ इन्हें समतल के रूप में भी जाना जाता है। इनकी विभाओं में केवल लंबाई व चौड़ाई होती है।

❖ समतल आकृतियों में त्रिभुज, वृत्त, बहुभुज, चतुर्भुज आदि का अध्ययन करते है।

त्रिभुज (Triangle)

❖ तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाई गई एक बंद आकृति **त्रिभुज** कहलाती है। ABC एक त्रिभुज है।



❖ एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं।

❖ भुजाओं AB, BC और AC को क्रमशः c, a और b से दर्शाया जाता है। A शीर्ष के सामने की भुजा BC को a से, शीर्ष B के सामने की भुजा AC को b से, शीर्ष C के सामने की भुजा AB को c से व्यक्त करते हैं।

❖ त्रिभुज के लिये संकेत Δ का प्रयोग करते हैं। जिन रेखाओं से त्रिभुज बनता है, उन्हें इसकी भुजाएँ (Sides) तथा जिन बिन्दुओं पर ये भुजाएँ परस्पर मिलती हैं, उन्हें त्रिभुज के शीर्ष (Vertices) कहते हैं। शीर्ष के आधार त्रिभुज का आकार निर्धारित करते हैं।

❖ किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

❖ किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

❖ किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

❖ किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाने पर बना बाह्य कोण अन्तः अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

त्रिभुज के प्रकार (Types of Triangle)

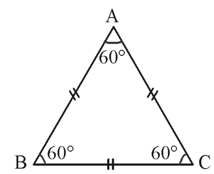
❖ त्रिभुज के प्रकारों को दो भागों में वर्गीकृत किया जाता है—

(i) भुजाओं के आधार पर

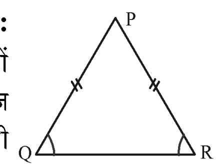
(ii) कोणों के आधार पर

भुजाओं के आधार पर (On the Basis of Sides)

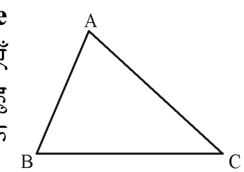
❖ **समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle):** जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर होती हैं, उसको समबाहु त्रिभुज कहते हैं। समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों का मान बराबर अर्थात् 60° होता है।



❖ **समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle):** एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोणों के मान भी समान होते हैं।

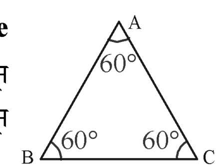


❖ **विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle):** जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ अलग-अलग माप की हों, उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। आकृति में ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज है।

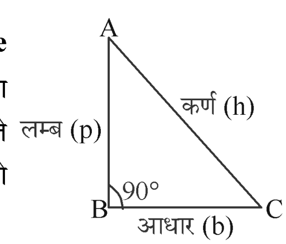


कोणों के आधार पर (On the Basis of Angles)

❖ **न्यून कोण त्रिभुज (Acute Angle Triangle):** जिस त्रिभुज के तीनों कोण न्यून कोण होते हैं अर्थात् 90° से कम होते हैं, न्यून कोण त्रिभुज कहलाते हैं।



❖ **समकोण त्रिभुज (Right Angle Triangle):** जिस त्रिभुज का एक कोण 90° का हो, उसको समकोण त्रिभुज कहते हैं। समकोण के सामने वाली भुजा को कर्ण कहते हैं।



समकोण त्रिभुज में,

$$(\text{कर्ण})^2 = \text{शेष भुजाओं के वर्गों का योग}$$

अर्थात् $h^2 = p^2 + b^2$ होता है।

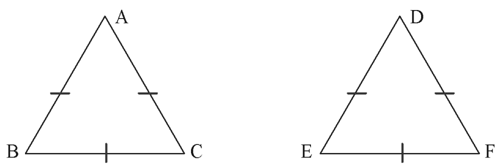
❖ **अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse Angle Triangle):** जिस त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण (90° से अधिक) होता है, अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।

14 त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं समरूप त्रिभुज [Congruence of Triangles & Similar Triangles]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **सर्वांगसमता (Congruence):** सर्वांगसमता = सर्व + सम अर्थात् सभी अंगों में समानता। किन्हीं दो ज्यामितीय आकृतियों में सर्वांगसमता का अर्थ है–उनका आकार व रूप में समान होना।

❖ **त्रिभुजों में सर्वांगसमता (Congruence in Triangles):** जब कोई दो त्रिभुज रूप व आकार में समान हों तो वे सर्वांगसम कहलाते हैं। अर्थात् जब किन्हीं **दो त्रिभुजों के संगत कोण व संगत भुजाएँ समान हों तो वे सर्वांगसम कहलाती हैं।**



उपरोक्त चित्रों में त्रिभुजों ABC और DEF में

AB = DE, AC = DF, BC = EF

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

जब हम ΔABC को उठाकर ΔDEF पर रखते हैं तो वह उसको पूरा-पूरा ढक लेती है।

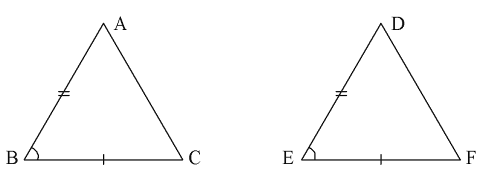
$\therefore$ ΔABC व ΔDEF सर्वांगसम है।

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

चिह्न $\cong$ सर्वांगसमता को दर्शाता है।

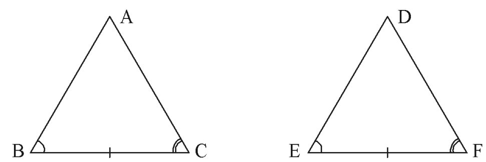
❖ **त्रिभुजों में सर्वांगसमता की शर्तें**—किसी भी त्रिभुज में छः अवयव होते हैं। तीन भुजा व तीन कोण। त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध करने के लिए सभी छः अवयवों को समान सिद्ध करना आवश्यक नहीं। त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित शर्तें सिद्ध करनी होती है।

(i) भुजा–कोण सर्वांगसमता (SAS Rule): यदि किसी भी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा इन भुजाओं द्वारा बनाया गया कोण दूसरी त्रिभुज की संगत भुजाओं तथा उन द्वारा बनाये गये कोण के समान हों तो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं।



चित्र में यदि BC = EF, AB = DE तथा $\angle E$ तथा $\angle B = \angle E$ हो तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(ii) कोण–भुजा–कोण (ASA Rule): यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनकी सांझी भुजा दूसरी त्रिभुज के संगत कोणों तथा उनकी सांझी भुजा के समान हो तो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते है।

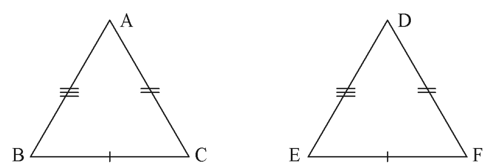


ऊपर के चित्र में $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

तथा भुजा BC = भुजा EF

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

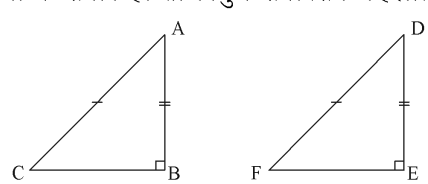
(iii) भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता (SSS Rule): यदि किसी त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरी त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के समान हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।



उपरोक्त चित्र में भुजा BC = EF, AB = DE, AC = DF

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(iv) समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता (RHS Rule): दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज के कर्ण तथा कोई भुजा दूसरी त्रिभुज के कर्ण तथा संगत भुजा के समान हों तो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते है।



उपरोक्त चित्र में $\angle B = \angle E$, (प्रत्येक 90°)

कर्ण AC = कर्ण DF भुजा AB = भुजा DE

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

❖ **समरूप त्रिभुज (Similar Triangles):** दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनकी **संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण** समान हों।

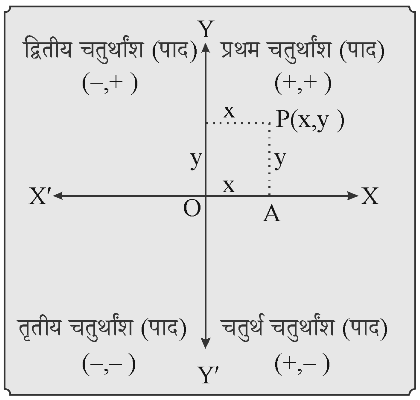
थेल्स प्रमेय 1: (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय)—यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को काटते हुए कोई रेखा खींची जाए तो वह त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

15 निर्देशांक ज्यामिति [Co-ordinate Geometry]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry):** निर्देशांक ज्यामिति के अन्तर्गत ज्यामिति का अध्ययन बीजगणितीय माध्यम से किया जाता है।

❖ चित्रानुसार XOX' तथा YOY' क्रमशः दो क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर रेखाओं को क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष कहते हैं।

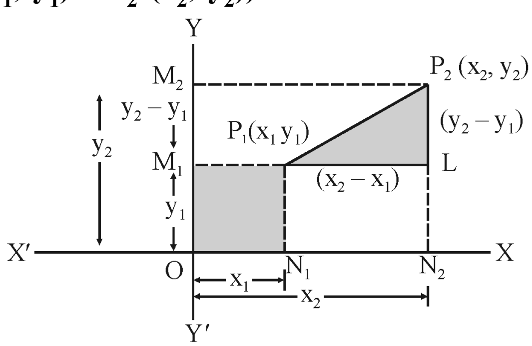


❖ O को मूल बिन्दु मानकर दोनों अक्षोंपर संख्या पटरी (Number Scale) बनाते हैं। ये अक्ष सतह को चार भागों में विभाजित करती है। जिन्हें चतुर्थांश (Quadrant) कहते हैं।

❖ चतुर्थांश XOY, $X'OY$, $X'OY'$ तथा XOY' को क्रमशः I, II, III तथा IV चतुर्थांश कहते हैं। अक्षों XOX' तथा YOY' को निर्देशांक अक्ष कहते हैं।

❖ सतह पर किसी बिन्दु P की स्थिति को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (Ordered pair) (x, y) से दर्शाते हैं। वास्तविक संख्या x को P का x निर्देशांक तथा वास्तविक संख्या y को P का y निर्देशांक कहते हैं। P बिन्दु के निर्देशांक को P(x, y) के रूप में लिखते हैं।

❖ **दो बिन्दुओं P_1 (x_1, y_1) व P_2 (x_2, y_2) के मध्य दूरी का सूत्र (Formula for distance between two point P_1 (x_1, y_1) व P_2 (x_2, y_2))**



❖ माना P_1 व P_2 समतल XOY में दो बिन्दुएँ हैं जिनके निर्देशांक (x_1, y_1) व (x_2, y_2) हैं।

चित्र के अनुसार $ON_1 = x_1$

$ON_2 = x_2$

अतः $P_1L = N_1N_2 = x_2 - x_1$

तथा $OM_1 = y_1,\ OM_2 = y_2$

अतः $P_2L = y_2 - y_1$

समकोणीय त्रिभुज P_1LP_2 से

$$(P_1P_2)^2 = (P_1L)^2 + (LP_2)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

अतः दूरी $$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad ...(1)$$

❖ बिन्दु P(x, y) की मूल बिन्दु O (0, 0) से दूरी

$$OP^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2$$

अतः $$OP = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ...(2)$$

❖ **उस बिन्दु के निर्देशांक जो दिये हुए बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ के मध्य दूरी को $m_1 : m_2$ में अन्तः व बाह्य विभाजित करे। (Coordinates of the point dividing the distance between two given poins A and B internally or externally in a given ratio $m_1 : m_2$.)**

(1) अन्तः विभाजन (Internal Division)

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

(2) बाह्य विभाजन (External division)

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$$

$$y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

❖ **एक त्रिभुज का क्षेत्रफल**—यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु (x_1,y_1), (x_2,y_2) तथा (x_3,y_3) हो तो उसका क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

16 समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल एवं परिमाप [Area and Perimeter of Plane Figures]

महत्वपूर्ण तथ्य

❖ समतलीय आकृतियों में त्रिभुज, चतुर्भुज, आयत, वर्ग, वृत्त एवं बहुभुज आते हैं जिनके क्षेत्रफल एवं परिमाप निम्नलिखित हैं—

त्रिभुज (Triangle)

❖ **त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Triangle)**
समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल—

$= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)

यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः a, b, c हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ या त्रिभुज की अर्धपरिमाप है।

इस सूत्र को **हीरो का सूत्र** से भी जाना जाता है।

परिमाप (P) = a + b + c = 2s है।

❖ **समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Equilateral Triangle)**
यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a हो तो समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग इकाई

❖ **समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Isosceles Triangle)**
यदि समद्विबाहु त्रिभुज की दो समान भुजाओं की लम्बाई a एवं तीसरी भुजा की लम्बाई b हो तो

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ वर्ग इकाई

❖ **समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Right Angle Triangle)**
यदि समकोण त्रिभुज का आधार की लम्बाई a एवं ऊँचाई b हो तो

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times a \times b$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}$ (समकोण बनाने वाली भुजाओं का गुणनफल)

चतुर्भुज (Quadrilateral)

❖ **चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Quadrilateral)**

$= \frac{1}{2}$ × विकर्ण × विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग

$= \frac{1}{2}d(p_1 + p_2)$

❖ **समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Parallelogram)**
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (A)

= आधार × आधार की संगत ऊँचाई

= b × h

क्षेत्रफल (A) $= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

जहाँ a और b इसकी आसन्न भुजाएँ हैं और d उस विकर्ण की लम्बाई है, जो दोनों भुजाओं के उन सिरों को मिलाता है जो उभयनिष्ठ नहीं हैं

तथा $s = \frac{a+b+d}{2}$ है।

❖ **समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Rhombus)**

$= \frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

❖ **समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Trapezium)**
(A) समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (A)

$= \frac{1}{2}$ × (समांतर भुजाओं का योग) × समांतर भुजाओं के बीच की लांबिक दूरी

$= \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$

$= \frac{a+b}{l}\sqrt{s(s-l)(s-c)(s-d)}$,

जहाँ $l = b - a$, यदि $b > a$ हो तथा $l = a - b$, यदि $a > b$ हो।

तथा, $s = \frac{c+d+l}{2}$

जहाँ c और d शेष दो भुजाएँ हैं।

(B) समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई (h)

$= \frac{2}{l}\sqrt{s(s-l)(s-c)(s-d)} = \left(\frac{2A}{a+b}\right)$

❖ **चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Cyclic Quadrilateral):** एक चतुर्भुज, जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं, को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं।
चक्रीय चतुर्भुज के लिए

क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$,

जहाँ $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ है।

एवं $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2\pi$

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = \pi$

17 वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल [Circumference of Circle and Area]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **वृत्त (Circle)**—वृत्त उन बिन्दु का बिन्दुपथ है जो बिन्दु से दूरी पर बिन्दु के चारो ओर घूम रहा है। बिन्दु से निश्चित दूरी वृत्त की त्रिज्या होती है।

❖ वृत्त का व्यास वह रेखा है जो वृत्त को दो बराबर भागों में विभाजित करती है यह त्रिज्या का दोगुना होता है।

वृत्त का क्षेत्रफल एवं परिमाप
(Area and Perimeter of a Circle)

❖ किसी भी वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात एक निश्चित अचर राशि होती है। इस अनुपात की अचर राशि को ग्रीक अक्षर π द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

❖ **वृत्त की परिधि**

परिधि = $\pi \times$ व्यास

$= \pi \times 2r = 2\pi r$

व्यावहारिक रूप में π का सन्निकट मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 लेते हैं।

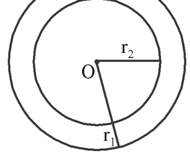
❖ **वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2**

❖ **अर्द्धवृत्त (Semi Circle):** किसी वृत्त का व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में बांटता है, प्रत्येक खण्ड को अर्धवृत्त कहते हैं।

अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\pi r^2$

अर्द्धवृत्त का परिमाप = $\pi r + 2r = r(\pi + 2)$

❖ **वलयिका का क्षेत्रफल (Area of Annullus):** चित्रानुसार दो वृत्ताकार वलयों का केन्द्र O हैं और जिनकी बाह्य और अन्तः त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 और r_2 ($r_1 > r_2$) हैं।



वलयिका का क्षेत्रफल

= दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल

= बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

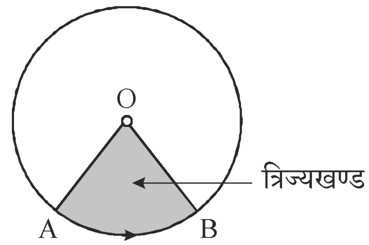
$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi(r_1^2 - r_2^2)$

= $\pi \times$ (त्रिज्याओं के वर्गों का अन्तर)

अतः वलयिका का क्षेत्रफल = $\pi(r_1^2 - r_2^2)$

❖ **वृत्त के त्रिज्य खण्ड (Sector of a Circle):** किसी भी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्यखण्ड (sector) कहते हैं। सामने चित्र में दिये गये वृत्त का त्रिज्य खण्ड AOB है।



❖ यदि r त्रिज्या के वृत्त में कोण $\theta°$ के त्रिज्य खण्ड की चाप की लम्बाई L और क्षेत्रफल A है, तो—

$$L = \frac{\pi r\theta}{180°} = 2\pi r \times \frac{\theta}{360°}$$

$$A = \frac{\pi r^2\theta}{360°} = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360°}$$

❖ वृत्त के त्रिज्यखण्ड की चाप की लम्बाई (L) और वृत्त की त्रिज्या ज्ञात होने पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$A = \frac{1}{2}(Lr)$$

❖ **वृत्तखण्ड (Segment):** वृत्त की प्रत्येक जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है। इनमें से प्रत्येक भाग को वृत्तखण्ड कहते हैं। बड़े भाग को दीर्घखण्ड और छोटे भाग को लघुखण्ड कहते हैं।

दिये गये चित्र में ABC लघु वृत्तखण्ड है तथा ADC दीर्घ वृत्तखण्ड है।

❖ **वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल**—

(i) लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360°} - \frac{r^2}{2}\sin\theta$

(ii) दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\theta}{180°} - \sin\theta\right)$

❖ **घड़ी की सुइयों से सम्बन्धित महत्त्वपूर्ण परिणाम**—

(1) घड़ी की मिनट की सुई 1 मिनट में 6° के कोण से घूमती है।

(2) घड़ी के घण्टे की सुई 1 मिनट में ½° के कोण से घूमती है।

18 ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन [Surface Area and Volume of Solids]

महत्वपूर्ण तथ्य

❖ वे आकृतियाँ जो एक तल में स्थित नहीं होती हैं बल्कि अन्तरिक्ष में स्थान घेरती हैं। उनमें तीन आयाम (लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई) होते हैं। ऐसे पदार्थों को **ठोस पदार्थ** कहते हैं। आकृतियों के अनुसार इन ठोस पदार्थों को घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु आदि नाम दिये गये हैं।

❖ **पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface Area)**—प्रत्येक ठोस पदार्थ में सतह होती है जिसे हम पृष्ठ कहते हैं। इन पृष्ठों का कुल क्षेत्रफल उस ठोस का **पृष्ठीय क्षेत्रफल** कहलाता है। जिन ठोसों का आकार बड़ा होता है उनका पृष्ठीय क्षेत्रफल छोटे आकार वाले ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल से अधिक होता है।

❖ किसी बरतन में जितना पानी या द्रव या अन्य पदार्थ भरा जा सकता है, वह उस बरतन में भरे जाने वाले **द्रव का आयतन** होता है। दूसरे शब्दों में कोई बरतन अथवा ठोस वस्तु अन्तरिक्ष में जितना स्थान घेरती है, वह उस **वस्तु का आयतन (Volume)** कहलाता है।

❖ **पृष्ठीय क्षेत्रफल की माप (मानक इकाई)**—हम यह जानते हैं कि किसी क्षेत्र की माप उसका क्षेत्रफल होता है। यदि हम चित्रानुसार एक ऐसा वर्ग लें जिसकी भुजा 1 सेमी हो तो इस **वर्ग का क्षेत्रफल एक वर्ग सेमी** होगा। यही **क्षेत्रफल की मानक इकाई** कहलाती है।

घन एवं घनाभ (Cube and Cuboid)

घनाभ (Cuboid)

❖ घनाभ के **आसन्न फलक रेखाखंड** के रूप में मिलते हैं जिन्हें किनारे कहते हैं। किसी भी **घनाभ में 12 किनारे** होते हैं। इन्हें घनाभ की भुजा भी कहते हैं।

❖ घनाभ के तीन किनारे जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं उसे **शीर्ष** कहते हैं। किसी भी **घनाभ में 8 शीर्ष** होते हैं।

❖ किसी घनाभ के **तीन माप** होते हैं। सबसे बड़ी भुजा घनाभ की लम्बाई होती है। आधार के फलक की दूसरी भुजा घनाभ की चौड़ाई होती है तथा तीसरी भुजा घनाभ की ऊँचाई अथवा गहराई कहलाती है।

❖ **घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$= 2(\text{लं.}\times\text{चौ.}+\text{ल.}\times\text{ऊँ.}+\text{चौ.}\times\text{ऊँ.})$

❖ घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

यदि घनाभ की लम्बाई = l सेमी, चौड़ाई = b सेमी तथा ऊँचाई = h सेमी हो तो घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$ घनसेमी होगा।

❖ **घनाभ ठोस का आयतन ज्ञात करना**—

✧ **घनाभ का आयतन** = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

✧ आधार का क्षेत्रफल = $\dfrac{\text{आयतन}}{\text{ऊँचाई}}$

✧ ऊँचाई = $\dfrac{\text{आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}}$

❖ **घनाभ का विकर्ण** = $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$

घन (Cube)

❖ जिस घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हो उसे **घन** कहते हैं।

❖ **घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल**—हम जानते हैं कि घन की प्रत्येक भुजा बराबर होती है और इसके 6 फलकों में प्रत्येक फलक वर्गाकार होता है।

एक फलक का क्षेत्रफल = **(भुजा)²**

अतः 6 फलकों का क्षेत्रफल = **6** (भुजा)²

इस प्रकार घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = **6 (भुजा)²**

❖ **घन का आयतन**—

अतः घन का आयतन $l \times l \times l$ घनसेमी

$= l^3$ घनसेमी = (लम्बाई)³ या (भुजा)³

✧ (i) **घन का आयतन** = (भुजा)³

(ii) **घन की एक भुजा** = $\sqrt[3]{\text{घन का आयतन}}$

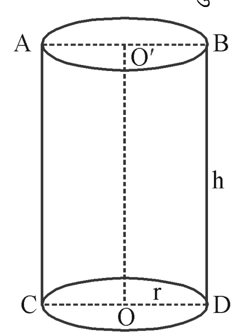
✧ घन सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $6a^2$ वर्ग सेमी.

✧ घन का विकर्ण = $\sqrt{3}a$

✧ घन का आयतन = a^3

लम्बवृत्तीय बेलन (Right Circular Cylinder)

❖ किसी आयत की एक भुजा को स्थिर करके उस आयत को उस भुजा के चारों ओर घुमाने से जो ठोस बनता है, उसे लम्बवृत्तीय बेलन कहते हैं।



❖ लम्ब वृत्तीय बेलन में दो समतलीय भाग होते हैं—एक तल तथा दूसरा ढक्कन। दोनों ही भाग वृत्ताकार होते हैं तथा एक दूसरे के समान्तर होते हैं। इन्हें हम बेलन के आधार और छत कहते हैं। इन वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा इन पर लम्ब होती है तथा इसी बेलन का अक्ष कहते हैं। चित्र में इसे OO′ द्वारा दर्शाया गया है।

❖ दोनों वृत्ताकार भागों को मिलाने वाला भाग वक्राकार होता है। इसे वक्रभाग का क्षेत्र कहते हैं। बेलन के ऊपर के ढक्कन और पैंदे के बीच की दूरी को बेलन की ऊँचाई कहते हैं। लम्ब वृत्तीय बेलन को प्रायः केवल बेलन के नाम से ही पुकारते हैं।

इस प्रकार **बेलन के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल** = $2\pi rh$

और एक **वृत्ताकार पृष्ठ का क्षेत्रफल** = πr^2

दोनों वृत्ताकार पृष्ठों का क्षेत्रफल = $\pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$

19 त्रिकोणमितीय अनुपात [Trigonometric Ratio]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

❖ **त्रिकोणमिति (Trigonometry):** गणित की वह शाखा जिसके अन्तर्गत त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के विभिन्न फलनों का अध्ययन किया जाता है, उसे त्रिकोणमिति कहा जाता है।

❖ त्रिकोणमिति शब्द की उत्पत्ति ग्रीक भाषा के शब्द Tri + gon + metron से हुई है। 'Tri' का अर्थ है—तीन, 'gon' का अर्थ है—भुजा तथा 'metron' का अर्थ है—मापन।

❖ त्रिकोणमिति से अभिप्राय त्रिभुज की तीन भुजा (लम्ब, कर्ण और आधार) एवं तीन कोण के मापन सम्बन्धों के अध्ययन से है।

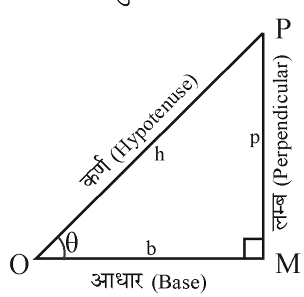
❖ किसी भी त्रिभुज में जो कोण जितना बड़ा होगा उसके ठीक सामने वाली भुजा उतनी ही बड़ी होगी। जैसे—समकोण त्रिभुज में सबसे बड़ा कोण 90° होता है तो उसके ठीक सामने वाली भुजा (कर्ण) सबसे बड़ी भुजा होगी।

❖ **पाइथागोरस प्रमेय (Pythogoras Theorem):** किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं के वर्गों का योग त्रिभुज के कर्ण के वर्ग के बराबर होता है।

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$
$$\text{आधार}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{लम्ब}^2$$
$$\text{लम्ब}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2$$

❖ **त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios):** किसी समकोण त्रिभुज के कोणों एवं भुजाओं का अनुपात त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाता है।

❖ माना $\angle MOP$ एक न्यून कोण है तथा $PM \perp OM$ तो समकोण त्रिभुज OMP में भुजा OM को आधार तथा कोण की सम्मुख भुजा PM को लम्ब और OP को कर्ण से जाना जाता है।



✧ $\sin\theta = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{PM}{OP}$

✧ $\text{cosine}\ \theta = \dfrac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{OM}{OP}$

✧ $\text{tangent}\ \theta = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

✧ $\text{cosecant}\ \theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{OP}{PM} = \dfrac{1}{\sin\theta}$

और इसे cosec θ लिखा जाता है।

✧ $\text{secant}\ \theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ और इसे sec θ लिखा जाता है।

✧ $\text{cotangent}\ \theta = \dfrac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}} = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ और इसे cot θ लिखा जाता है।

❖ **विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी—**

डिग्री रेडियन / त्रिकोणमितीय अनुपात	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\text{cosec}\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

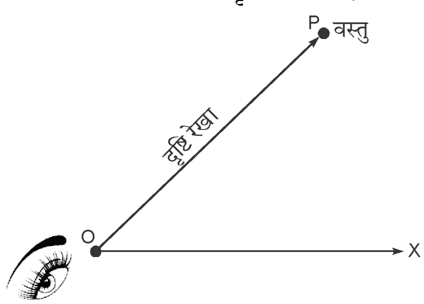
❖ **पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात—पूरक कोण**—कोई दो कोण परस्पर पूरक कोण कहलाते हैं यदि इनकी माप का योगफल 90° हो। अतः θ का पूरक कोण (90°–θ) होगा।

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$$
$$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$$

20 ऊँचाई एवं दूरी [Height and Distance]

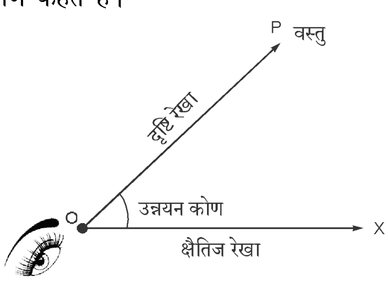
महत्त्वपूर्ण तथ्य

- ❖ कभी-कभी हमें नदियों की चौड़ाई, किन्हीं दो स्थानों की दूरियाँ, किसी टावर, मकान, पेड़, पहाड़, बिजली के खम्भों तथा उड़ते हुए हवाई जहाज की ऊँचाईयाँ आदि ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। ये सभी तथ्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के ज्ञान का उपयोग कर समकोण त्रिभुज की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है।
- ❖ **दृष्टि रेखा (Line of Sight):** प्रेक्षक की आँख से उसके द्वारा देखी गई वस्तु को मिलाने वाली रेखा दृष्टि रेखा कहलाती है।



दिये गये चित्र में आँख बिन्दु O पर हो और वस्तु की स्थिति बिन्दु P पर हो तब OP रेखा दृष्टि रेखा कहलायेगी।

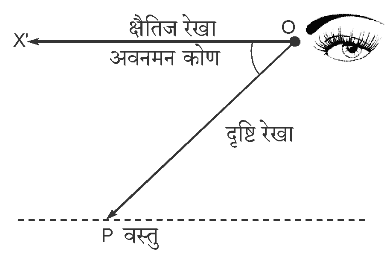
- ❖ **क्षैतिज रेखा (Horizontal Line):** वह रेखा जो प्रेक्षक की आँख से सीधे भूमि के **समान्तर** जाती है, **क्षैतिज रेखा** कहलाती है।
- ❖ **उन्नयन कोण (Angle of Elevation):** यदि कोई वस्तु आँखों के क्षैतिज तल से **ऊपर की ओर** हो अर्थात् **ऊपर** की वस्तु को नीचे से देखने की स्थिति में क्षैतिज तल पर जो कोण बनता है, उसे उन्नयन या उन्नतांश कोण कहते हैं।



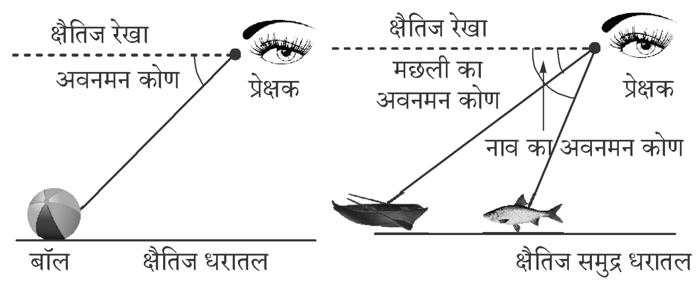
दिये गये चित्र में आँख बिन्दु O पर हो और वस्तु की स्थिति बिन्दु P पर हो तब OP दृष्टि रेखा जो क्षैतिज रेखा OX से कोण $\angle XOP$ बनाती हो तो उन्नयन कोण = $\angle XOP$

उन्नयन कोण को वस्तु की कोणीय ऊँचाई भी कहा जाता है।

- ❖ **अवनमन कोण (Angle of Depression):** यदि कोई वस्तु आँखों के क्षैतिज तल से **नीचे की ओर** हो अर्थात् नीचे की वस्तु को ऊपर से देखने की स्थिति में क्षैतिज तल पर जो कोण बनता है, उसे **अवनमन या अवनति** कोण कहते हैं।



दिये गये चित्र में आँख बिन्दु O पर हो और वस्तु की स्थिति बिन्दु P पर हो तब OP दृष्टि रेखा जो क्षैतिज रेखा OX' से कोण $X'OP$ बनाती हो तो अवनमन कोण = $\angle X'OP$



- ❖ **पूरक कोण (Complementary Angle):** दो कोणों का योग एक समकोण या 90° के बराबर हो तो वे एक-दूसरे के पूरक कोण होते हैं।

बहुविकल्पीय प्रश्नोत्तर

1. एक व्यक्ति एक टॉवर के शिखर से एक नाव को टॉवर से दूर जाते देखता है। नाव टॉवर से 60 मी की दूरी पर व्यक्ति की आँख से 45° का अवनमन कोण बनाती है। 5 मिनट बाद अवनमन कोण 30° हो जाता है। नाव की लगभग चाल क्या होगी, यह मानते हुए कि वह एक शांत नदी पर चल रही है?

(A) 36 किमी. प्रति घंटा (B) 42 किमी. प्रति घंटा
(C) 38 किमी. प्रति घंटा (D) 32 किमी. प्रति घंटा **[D]**

व्याख्या—

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{60} \Rightarrow AB = 60 \quad ...(1)$$

21 आँकड़ों का चित्रों द्वारा निरूपण [Data Interpretation by Figures]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

आँकड़े

- **आँकड़े/समंक (Data):** ऐसे तथ्य जो विशेष गुणों से युक्त हो, उनका संख्यात्मक रूप में प्रदर्शन **समंक** कहलाता है। इसे साधारणतः दो रूपों में प्रदर्शित किया जाता है—**गुणात्मक एवं संख्यात्मक**।

आँकड़ों का संकलन (Collection of Data)

- आँकड़ों का संकलन करने का उद्देश्य सामाजिक व आर्थिक समस्याओं को समझना, उनका विश्लेषण करना एवं उनकी व्याख्या करना होता है, ताकि उनके कारण समझकर उनका समाधान खोजा जा सके। इस हेतु जिन संख्यात्मक तथ्यों की आवश्यकता होती है, उन्हें आँकड़े कहा जाता है।

शुद्ध आँकड़े (Raw Data)

- वे आँकड़े जिन्हें एक अनुसंधानकर्ता अपने अनुसंधान के दौरान संकलित करता है, शुद्ध आँकड़े कहलाते हैं। ये अव्यवस्थित रूप में होते हैं। अनुसंधानकर्ता को इन्हें व्यवस्थित करना होता है।
- यदि आँकड़े किसी एक चर से संबंधित हों, तो उसे एकचर कहते हैं। यदि आँकड़े का संबंध दो चरों से हों, तो उसे द्विचर कहते हैं। यदि आँकड़े दो से अधिक चरों से संबंधित हों, तो उसे बहुचर कहते हैं।

आँकड़ों के स्रोत

- आँकड़ों के संग्रहण के दो स्रोत हैं—
  1. **प्राथमिक स्रोत (Primary Source)**—यदि हम आँकड़ों को प्रथम बार उनके उद्गम स्थान के मूलभूत स्रोतों से संग्रहित कर रहे हैं तो ये प्राथमिक आँकड़ें होंगे।
  2. **द्वितीयक स्रोत (Secondary Source)**—ये वे आंकड़े होते हैं जो किसी संस्था या एजेंसी से संग्रहित किए जाते हैं। उस संस्था या एजेंसी ने उन्हें अपने स्वयं के सांख्यिकीय सर्वेक्षण से इन्हें इकट्ठा किया हुआ होता है। अतः दूसरे व्यक्ति/संस्था/एजेंसी द्वारा इकट्ठे किए आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाएंगे।

प्राथमिक व द्वितीयक आँकड़ों में अंतर

- **मौलिकता में भिन्नता**—प्राथमिक आँकड़े मौलिक उद्‌गम से प्राप्त किए जाते हैं। अतः इन्हें **कच्चे माल** के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। जबकि द्वितीयक आँकड़े **'तैयार सामग्री'** होती है जिसे तुरंत उपयोग किया जा सकता है।
- **उद्देश्य में भिन्नता**—प्राथमिक आँकड़ों का उद्देश्य निश्चित होता है, उनमें संशोधन की जरूरत नहीं होती। वहीं द्वितीयक आँकड़े पहले ही किसी अन्य उद्देश्य के लिए एकत्रित किए गए होते हैं। अतः उनमें संशोधन की आवश्यकता होती है।
- **संग्रहण लागत में भिन्नता**—प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण में समय व लागत अधिक होती है जबकि द्वितीयक आँकड़ों में समय व लागत कम होती है।

प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की विधियाँ

1. **प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)**—इस प्रकार के अनुसंधान में व्यक्ति स्वयं वांछित क्षेत्र में जाकर सूचना प्रदान करने वाले से व्यक्तिशः सम्पर्क करके आँकड़ों का संग्रहण करता है। इस प्रणाली के गुण - आँकड़ों की मौलिकता, शुद्धता, विश्वसनीयता एवं एकरूपता।
2. **अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)**—इस विधि में किसी समस्या में अप्रत्यक्ष रूप से संबंधित व्यक्तियों से मौखिक पूछताछ कर आँकड़ों को संग्रहित किया जाता है।
   गुण—विस्तृत क्षेत्र में लागू की जा सकती है। समय व लागत खर्च कम होता है। विशेषज्ञों के सुझाव प्राप्त हो जाते हैं एवं आँकड़ों के संग्रहण में सरलता रहती है।
3. **स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति (Information from Local Sources)**—इस विधि में अनुसंधानकर्त्ता विभिन्न क्षेत्रों में उस स्थान के व्यक्तियों को नियुक्त कर सूचनाएँ एकत्रित करता है।
   गुण—यह प्रणाली मितव्ययी है, इसमें विस्तृत क्षेत्र से सूचनाएँ प्राप्त होती है, एवं सूचनाएँ निरंतर प्राप्त होती रहती है।
4. **प्रश्नावलियों द्वारा अनुसंधान (Information by Questionnaire)**—इस विधि में अनुसंधान के उद्देश्यों के अनुरूप प्रश्नावली तैयार कर डाक द्वारा अथवा गणक को व्यक्तिशः भेजकर सूचनाएँ एकत्रित की जाती है।
   गुण—इस विधि से प्राप्त सूचनाएँ मौलिक होती है। यह प्रणाली मितव्ययी है। इसमें विस्तृत क्षेत्र से आँकड़ों का संग्रहण किया जाता है। इसमें निष्पक्षता व शुद्धता रहती है। इस विधि में सभी प्रश्नों के उत्तर प्राप्त हो जाते हैं।

अच्छी प्रश्नावलियों के गुण

- प्रश्नावली के प्रश्नों से पूर्व आवश्यक निर्देश होने चाहिए।
- प्रश्नों की सीमित संख्या होनी चाहिए।
- प्रश्नों की भाषा स्पष्ट व सरल हो।
- प्रश्नों का उचित व क्रमबद्ध होना आवश्यक है।
- प्रश्नावलियों में ऐसे प्रश्न न हो कि उनके लिए उत्तरदाता को गणना करनी पड़े।
- प्रश्नावली में ऐसे प्रश्न भी सम्मिलित करने चाहिए जिनके उत्तरों की सत्यता का परीक्षण हो सके।
- प्रश्नावली यदि डाक से भेजी जा रही हो तो उसमें उसे वापस लौटाने की प्रार्थना व दी गई सूचना गुप्त रखे जाने का आश्वासन सम्मिलित किया जाना चाहिए।

22 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप [Measure of Central Tendency]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

सांख्यिकी

❖ आँकड़े या परिमाणात्मक सूचकांक जिनसे कुछ अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं, सांख्यिकी कहलाते हैं।

आँकड़ों की विवेचना

❖ आँकड़ों के विवेचन से तात्पर्य है—आँकड़ों का संग्रहण, वर्गीकरण, सारणीयन, तुलना, निर्वचन तथा पूर्वानुमान। प्रायः आँकड़ों को दो प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है—

(i) लेखा-चित्रों द्वारा, (ii) सारणी द्वारा

❖ **प्राप्त आंकड़ों से बारम्बारता बंटन सारणी बनाना**—प्राप्त आंकड़ों को सारणीबद्ध करने से पूर्व निम्नांकित तथ्यों की जानकारी आवश्यक है—

✧ विचर का मान या प्रेक्षण का मान
✧ बारम्बारता (Frequency)
✧ मिलान चिह्न या गणना चिह्न

❖ **विचर का मान या प्रेक्षण का मान**—प्राप्त आंकड़ों की संख्या अर्थात् प्रेक्षणों की संख्या कम या अधिक हो सकती है। परन्तु आंकड़ों की विविधता या प्रेक्षणों का मान सीमित ही होता है। प्रेक्षणों के मान को **विचर का मान** भी कहते हैं।

जैसे—गणित विषय की एक परख का पूर्णांक 10 है तो परख में प्राप्तांक 0 से 10 के मध्य ही होंगे। अर्थात् विचर का मान या प्राप्तांक या प्रेक्षण का मान 0 से 10 तक सीमित होगा। परन्तु इस परख में कुल 40 विद्यार्थियों ने भाग लिया हो, तो प्रेक्षणों की कुल संख्या 40 होगी।

उदाहरण—एक कक्षा की 20 छात्राओं के गणित क्विज के प्राप्तांक हैं—

36, 37, 40, 48, 50, 48, 36, 50, 37, 36
48, 40, 50, 48, 37, 40, 50, 48, 37, 48

✧ ये आंकड़े प्राथमिक आंकड़े हैं।
✧ आंकड़ों या प्रेक्षणों की कुल संख्या = 20 है।
✧ विचर का मान या प्रेक्षण का मान या आंकड़ों की विविधता मात्र 36, 37, 40, 48, 50 (पाँच प्रकार के) हैं।

❖ **बारम्बारता (Frequency):** किसी अध्ययन में प्राप्त आंकड़ों की विविधता का अवलोकन करें तो हम पाएँगे कि किसी प्रेक्षण के मान की आवृत्ति होती है। किसी एक आंकड़े की आवृत्ति जितनी बार होती है, वह उस **आंकड़े या प्रेक्षण की बारम्बारता (Frequency)** कहलाती है। जैसे—उपर्युक्त उदाहरण में, 36 की आवृत्ति 3 बार, 37 की आवृत्ति 4 बार, 40 की आवृत्ति 3 बार, 48 की आवृत्ति 6 बार, 50 की आवृत्ति 4 बार हुई है। अतः 36 की बारम्बारता = 3, 37 की बारम्बारता = 4, 40 की बारम्बारता = 3, 48 की बारम्बारता = 6 एवं 50 की बारम्बारता = 4 है।

❖ **मिलान चिह्न या गणना चिह्न (Tally Marks)**—प्रेक्षण के मान की बारम्बारता ज्ञात करने के लिए मिलान चिह्न (Tally Marks) का प्रयोग किया जाता है।

❖ प्रेक्षण के मान की प्रत्येक आवृत्ति के लिए एक खड़ी रेखा खींची जाती है और चार खड़ी रेखाओं के पश्चात् उस प्रेक्षण का मान की पाँचवीं आवृति के लिए इन चारों खड़ी रेखाओं को काटती हुई एक तिरछी रेखा खींची जाती है।

जैसे—36 की आवृत्ति = ||| = 3 (उपर्युक्त उदाहरण में)
37 की आवृत्ति = |||| = 4
40 की आवृत्ति = ||| = 3
48 की आवृत्ति = ~~||||~~ | = 6
और 50 की आवृत्ति = |||| = 4

❖ **असमूहित आंकड़ों की सहायता से बारम्बारता सारणी तैयार करना**—असमूहित आंकड़ों की सहायता से बारम्बारता सारणी बनाना हम निम्नलिखित उदाहरण से भली-भाँति सीख सकते हैं।

प्रश्न : एक विद्यालय की 8वीं कक्षा के 30 छात्रों के गणित विषय के प्रथम टेस्ट में 5 अंकों में से प्राप्त अंक क्रमशः निम्न प्रकार हैं—

3, 1, 4, 5, 0, 3, 2, 2, 3, 3
2, 2, 3, 3, 1, 1, 3, 4, 4, 2
3, 2, 2, 3, 3, 4, 1, 1, 5, 5

इनकी बारम्बारता सारणी तैयार कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि जितनी बार जिस अंक की पुनरावृत्ति होती है वह उसकी बारम्बारता होती है। अतः सारणी बनाने के लिए तीन स्तम्भों को बनाया जाता है जिसमें प्रथम स्तम्भ में 0 से 5 तक विचर होंगे तथा दूसरे स्तम्भ में रेखाओं द्वारा इनकी बारम्बारता दर्शाई जाएगी, तीसरे स्तम्भ में बारम्बारता को संख्यात्मक मान दिया जाता है, अतः सारणी निम्न प्रकार होगी।

क्र.सं.	प्राप्तांक	गणना चिह्न	बारम्बारता
1.	0	|	1
2.	1	~~||||~~	5
3.	2	~~||||~~ ||	7
4.	3	~~||||~~ ~~||||~~	10
5.	4	||||	4
6.	5	|||	3

❖ **असमूहित आँकड़ों से संचयी बारम्बारता सारणी बनाना**—संचयी बारम्बारता सारणी असमूहित आंकड़ों की सहायता से निम्नानुसार सीख सकते हैं—

23 जन्म-मृत्यु सांख्यिकी एवं सूचकांक [Birth-Death Statistics and Index Numbers]

महत्त्वपूर्ण तथ्य

जन्म-मृत्यु दर (Birth-Death Rate)

❖ **अशोधित जन्म दर**—दिए हुए वर्ष में प्रति हजार जनसंख्या पर जन्मे बच्चों की जनसंख्या को अशोधित जन्म-दर कहते हैं।

अशोधित जन्म दर =
$$\frac{\text{दिए हुए वर्ष में जन्मे बच्चों की संख्या}}{\text{उस वर्ष के मध्य में जनसंख्या}} \times 1000$$

❖ **अशोधित मृत्यु दर**—दिए हुए वर्ष में प्रति हजार की जनसंख्या पर मृत्युओं की संख्या को अशोधित मृत्यु दर कहते हैं।

अशोधित मृत्यु दर =
$$\frac{\text{दिए हुए वर्ष में मृत्युओं की संख्या}}{\text{उस वर्ष के मध्य में जनसंख्या}} \times 1000$$

❖ **विशिष्ट मृत्यु दर**—दिए हुए वर्ष में एक विशिष्ट वर्ग की प्रति हजार की जनसंख्या पर हुई मृत्युओं की संख्या को विशिष्ट मृत्यु दर कहते हैं।

आयु विशिष्ट मृत्यु दर =
$$\frac{\text{दिए हुए वर्ष में विशेष आयु वर्ग में हुई मृत्युओं की संख्या}}{\text{दिए हुए वर्ष के मध्य में आयु वर्ग की जनसंख्या}} \times 1000$$

❖ **शिशु मृत्यु दर**—दिए हुए वर्ष में पैदा हुए प्रति हजार शिशुओं पर उसी वर्ष एक वर्ष से कम आयु के मरने वाले शिशुओं की संख्या को शिशु मृत्यु दर कहते हैं।

$$\text{शिशु मृत्यु दर} = \frac{\text{दिए हुए वर्ष में 1 साल से कम आयु के शिशुओं की मृत्युओं की संख्या}}{\text{उस वर्ष पैदा हुए जीवित शिशुओं की संख्या}} \times 1000$$

❖ **मानक मृत्यु दर**—मानकीकृत मृत्यु दर $(S_1DR) = \frac{\Sigma S_x D_x}{\Sigma S_x}$

S_x = वर्ग x की मानकीकृत संख्या

D_x = वर्ग x की विशिष्ट मृत्यु दर

सूचकांक (Index Number)

❖ सूचकांक एक ऐसा सांख्यिकीय माप है, जो समय, भौगोलिक स्थिति या अन्य विशेषताओं के आधार पर किसी चर मूल्य अथवा संबंधित चर मूल्यों के समूह में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है।

सूचकांकों के लाभ एवं उपयोग (Advantages and Uses of Index Number)

✧ कीमत स्तर या मुद्रा के मूल्य में परिवर्तन का माप ज्ञात किया जा सकता है।
✧ जीवन-स्तर में परिवर्तन का ज्ञान प्राप्त होता है।
✧ वेतन तथा भत्ते में समन्वय किया जाता है।
✧ व्यापारिक योजनाएँ बनाने में व्यापारी वर्ग के लिए उपयोगी।
✧ उत्पादन वृद्धि या ह्रास के बारे में जानकारी।
✧ विदेशी व्यापार सम्बन्धी जानकारी।
✧ देश की आर्थिक स्थिति का ज्ञान होने से राजनीतिज्ञों को लाभ।
✧ मौद्रिक व राजकोषीय नीति निर्माण में सरकार के लिए सहायक।

सूचकांकों के प्रकार (Types of Index Number)

❖ सूचकांक के दो प्रमुख प्रकार होते हैं—

(i) साधारण सूचकांक (Simple Index Numbers)—साधारण सूचकांक वे सूचकांक हैं जिनमें सूचकांक के सभी मदों को समान महत्त्व दिया जाता है।

उदाहरण के लिए, कीमतों के साधारण सूचकांक में सभी वस्तुओं को समान भार दिया जाता है। चाहे कुछ वस्तुओं का उपभोग अधिक मात्रा में किया जाए तथा कुछ का कम मात्रा में। वह विभिन्न वस्तुओं तथा सेवाओं की कीमतों का एक साधारण औसत होगा।

(ii) भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers)—भारित सूचकांक वे सूचकांक हैं जिनमें शृंखला के विभिन्न मदों को उनके सापेक्षीय महत्त्व के आधार पर विभिन्न भार दिए जाते हैं। यह विभिन्न वस्तुओं तथा सेवाओं की कीमतों का साधारण औसत नहीं है, जैसा कि साधारण कीमत सूचकांक में होता है। इसके विपरीत यह विभिन्न वस्तुओं की कीमतों का भारित औसत है।

उदाहरण के लिए, यदि चावल पर किया गया खर्च कपड़े पर किए जाने वाले खर्च का दुगना है तो कीमत सूचकांक के निर्माण में चावल की कीमत को '2' भार दिया जाएगा तथा कपड़े की कीमत को '1' भार दिया जाएगा।

साधारण सूचकांक की रचना (Construction of Simple Index Numbers)

❖ **सरल समूहीकरण विधि (Simple Aggregative Method):**

सूत्र— $$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100$$

जहाँ, P_{01} = वर्तमान वर्ष का मूल्य सूचकांक

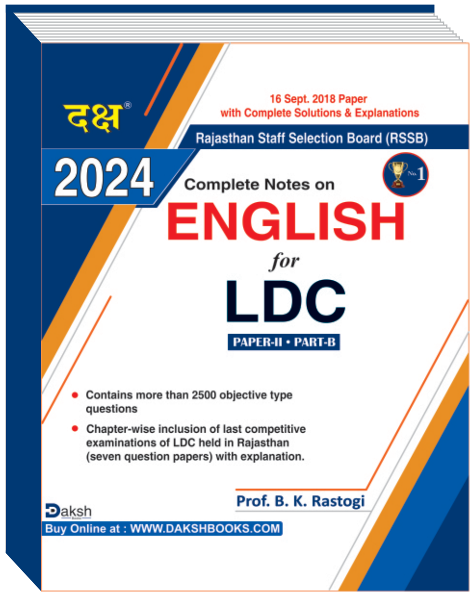
ΣP_1 = वर्तमान वर्ष की विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों का योग।

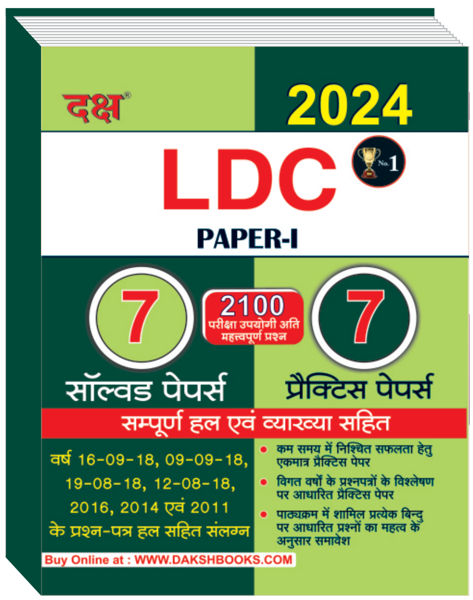
ΣP_0 = आधार वर्ष की उन्हीं वस्तुओं के मूल्यों का योग।

✧ **वर्तमान वर्ष**—वर्तमान वर्ष वह वर्ष है जिसमें होने वाले औसत परिवर्तन को मापा जाता है या जिसके लिए सूचकांक तैयार किया जाता है।

✧ **आधार वर्ष**—आधार वर्ष वह वर्ष है जिसके सन्दर्भ में वर्तमान वर्ष में होने वाले परिवर्तन के विस्तार को मापा जाता है। आधार वर्ष के सूचकांक को 100 माना जाता है।

दक्ष की पुस्तकें Online Order करने के लिए www.dakshbooks.com पर जायें





दक्ष प्रकाशन

(A Unit of College Book Centre)

A-19 सेठी कॉलोनी, जयपुर (राज.)

फोन नं. 0141-2604302

Code No. D-763 | ₹ 340/-

इस पुस्तक को ONLINE खरीदने हेतु

WWW.DAKSHBOOKS.COM

पर ORDER करें

★ **SPECIAL DISCOUNT + FREE DELIVERY** ★